Temps d'Educació, 54, p. 203-220 (2018) Universitat de Barcelona

Resolució de problemes: creativitat i didàctica matemàtica

Albert Mallart Solaz*

Resum

Un currículum és una planificació educativa on es concreten les competències a assolir per viure en societat. La competència matemàtica (transdisciplinària) és una aptitud per trobar matemàtiques a la vida, elaborar raonaments fonamentats, usar tècniques per calcular, representar i interpretar dades disponibles, i aplicar estratègies de resolució de problemes (RP). Per potenciar el domini competencial matemàtic, cal que els docents sàpiguen identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar els fets matemàtics. La RP és creativa, i crear és el nivell més alt d'objectius educatius. Els futurs mestres no estan interessats a crear problemes per afavorir un correcte aprenentatge de la RP perquè no saben adequar la dificultat a un nivell educatiu ni trobar un context familiar. Motivats per entendre i millorar l'aprenentatge del procés de RP, ens proposem l'estudi de la fase d'il·luminació.

Paraules clau

Creativitat, didàctica de les matemàtiques, currículum, competència matemàtica, resolució de problemes, creació de problemes, formació del professorat de matemàtiques.

Recepció original: 06 de febrer de 2018
Acceptació: 07 de maig de 2018
Publicació: 20 de juliol de 2018

> La inventiva és, doncs, la gran virtut dels intel·lectuals, la primera de totes. No sóc jo sol a considerar-ho així. Ho veuen tots els pensadors, per més que no se'n recordin quan alguna passió d'escola els ofusca. I aquesta gran virtut, alguns tal vegada amb una mica de fonament, l'han regatejada al nostre poble. Diuen que som bons treballadors, bons imitadors, gent pràctica que ens apropiem fàcilment els coneixements d'altri, però que no sabem inventar. Doncs bé; jo crec molt necessari que es fomenti dintre del nostre país la inventiva en tots els seus ordres. (Joaquim Ruyra, *L'educació de la inventiva. Discurs llegit en la V Festa anual de l'IEC, 1938*)

Matemàtiques i societat

El panorama científic actual es presenta des d'un punt de vista global i obert, tot considerant l'ésser humà dins la natura. No vol emmarcar-se *entre les disciplines*, sinó anant *més enllà de*. Hi ha la pretensió d'apropar el coneixement que es troba en compartiments estancs. La disciplinarietat, la pluridisciplinarietat, la interdisciplinarietat, i la transdisciplinarietat són quatre fletxes del mateix arc del coneixement considerat per Nicolescu (1996). Especialitzar el coneixement i subdividir-lo sense relacionar els fragments resulta contraproduent didàcticament en el segle XXI. Les disciplines científiques poden suggerir les relacions entre els processos i les capacitats següents: observació, identificació, relació, codificació i representació, interpretació, inferència, anàlisi i modelització. També convé considerar la necessitat de provocar constantment una reflexió explícita sobre aquestes capacitats, bo i propiciant una aprehensió implícita, sense considerar-les estàtiques. És sota aquestes premisses que juga un paper important la resolució de problemes (Mallart, 2009).

(*) Doctor (UAB) i llicenciat en Matemàtiques (UB), membre del grup consolidat d'Investigació i Assessorament Didàctic (GIAD). Professor associat al Departament d'Educació Lingüística i Literària i de Didàctica de les Ciències Experimentals i de la Matemàtica (UB), professor de l'Institut Vall d'Hebron. Adreça electrònica: albert.mallart@ub.edu

10.1344/TE2018.54.12
Creative Commons 3.0 Reconeixement no comercial

Un problema es pot considerar com una situació plantejada amb finalitat educativa que proposa una qüestió resoluble amb mètodes no immediatament accessibles al resolutor. És important que el resolutor no disposi d'un algorisme que relacioni dades, incògnites i conclusions automàticament, sinó que impliqui que hagi de buscar, investigar, establir relacions i fer participar els seus afectes.

Ens podem plantejar tres enfocaments diferents de la paraula problema segons el paper assignat de forma inclusiva a la tasca, segons els destinataris, i segons els propòsits del docent. Si abordem el plantejament de problemes a classe com una simple tasca a dur a terme, només té importància la seva estructura matemàtica a l'anàlisi o a la selecció de problemes. Per planificar les classes n'hi ha prou amb una anàlisi de tasques, si se segueix una tradició conductista. Es demana a l'alumne que la seva resolució identifiqui i desenvolupi una estructura matemàtica apresa, cosa poc interessant. Si es pensa en els destinataris, s'observen les diferents dificultats amb què es troben els diferents resolutors. S'emfatitzen els coneixements previs, les capacitats personals, les idees d'aplicació significativa i rutinària (aspectes cognitius). Si es pensa en els diferents propòsits del docent quan presenta un problema, es pensa en algú més que un simple planificador o prescriptor. Es dóna importància al paper que el docent atorga a cada problema, a la resolució de problemes i al context en el qual es desenvolupa. Observem que, encara que les dificultats no siguin intrínseques a una situació, aquestes depenen dels coneixements i de les experiències del resolutor (Blanco et al., 2009).

La metodologia que se segueix durant la resolució de problemes (matemàtics, físics, socials, de la vida quotidiana...) és objecte d'interdisciplinarietat. Edgar Morin destaca els llaços, els punts comuns, els marges i els ponts entre les ciències. A l'escola s'ensenya a resoldre problemes perquè, com a mínim, tothom ha de saber reconèixer els problemes que li planteja la vida en societat, si no és capaç de resoldre'ls. La resolució de problemes ha de constituir un nucli fonamental de l'aprenentatge i del bagatge científic, i ha de constituir també una manera d'abordar situacions conflictives. Cal treballar amb problemes de contextos extramatemàtics perquè abans d'aplicar estratègies de resolució de problemes, convé treballar la modelització de les situacions, aspecte essencial de tota activitat científica. Consisteix en la construcció d'un model matemàtic que representa la realitat objecte d'estudi i que facilita la interpretació dels resultats obtinguts per respondre les qüestions inicials. El llenguatge de les matemàtiques es fonamenta en regles que cal aprendre per a poder-se expressar. Resulta necessari buscar solucions i no només memoritzar procediments, resulta necessari explorar patrons i no només memoritzar fórmules, i també cal formular conjectures i no només fer exercicis. Tot això es practica resolent problemes. Per aquesta raó, el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) proposà la resolució de problemes com a focus de les matemàtiques a l'escola.

Per la seva banda, Freudenthal (1983) va demostrar que, ja que els problemes resolts a l'escola poques vegades pertanyen a contextos del món real, hi ha una distorsió de les matemàtiques que constitueix la causa de la majoria dels fracassos en el seu ensenyament. Al seu torn, Martínez (1999) opina que els alumnes han de poder redescobrir els resultats. Busca contextos que funcionin i troba cinc requisits: que motivin; que permetin aprendre a utilitzar les ciències en societat; que ajudin a conèixer la història en la qual s'emmarca i, d'aquesta manera, s'incrementa l'interès; que desperti la creativitat, l'anàlisi i l'organització de la informació; que facin de mediadors entre allò que és concret i allò que és abstracte, entre el problema i el model.

Els alumnes arriben a pensar que s'estudia només per aprovar les assignatures de l'escola, sense contemplar altres necessitats socials reals (Kilpatrick, 1985). Al professor li toca intentar desenvolupar una actitud positiva i una motivació adient i favorable cap a les matemàtiques, tenint en compte el seu caràcter instrumental i transdisciplinari. Els problemes representen un mitjà per emfasitzar els processos de pensament i els mètodes inquisitius. Són una eina privilegiada per formar éssers autònoms en resolució de problemes, crítics i reflexius, amb capacitat per qüestionar-se pels fets que succeeixen al seu voltant (Kilpatrick, 1985). Convé seleccionar problemes accessibles als alumnes però que els suposi un repte, de manera que els pugui encoratjar cap a una exposició d'idees, una argumentació i un esperit crític. També s'ha de vigilar de fomentar el treball en grup, la comunicació d'idees, el contrast d'hipòtesis i el diàleg. Els problemes escollits han d'interessar als resolutors en processos generadors de coneixement tals com definir, fer-se preguntes i qüestionar, observar, classificar, particularitzar, generalitzar, conjecturar, demostrar i aplicar (Santaló, 1994).

Competència matemàtica

Consideracions curriculars

Un currículum es pot considerar com una planificació educativa de la formació dels ciutadans, on es concreten les competències a assolir amb l'objectiu d'adaptar-se i fer front a les demandes socials per a un context d'espai i temps concret. S'hi defineixen uns objectius que permetran desenvolupar els conceptes, procediments, habilitats, estratègies, recursos i tècniques necessaris per a una plena interacció amb la societat i l'entorn, partint d'una capacitat crítica i imaginativa adient. Segons aquest supòsit, Perrenoud (2000) entén la competència com una capacitat d'actuar eficaçment davant de certes situacions, una capacitat que es recolza en els coneixements, però que no s'hi esgota. S'hi inclouen tant coneixements teòrics com habilitats i actituds. Tot havent-hi una gran diversitat conceptual del terme competència, hi ha acord a considerar-la com una acció conscient duta a terme per solucionar una problemàtica concreta, amb l'aplicació i la implicació dels condicionants necessaris i adequats (ja siguin coneixements, procediments, actituds, estratègies, habilitats...), amb capacitat per analitzar el procés i el resultat de manera crítica per fer-hi els canvis oportuns. L'aprenentatge dels continguts es proposa que avui segueixi una metodologia que porti a l'adquisició de competències per donar respostes a la problemàtica de la realitat. El treball per competències implica aplicar metodologies actives amb enfocaments del mètode científic per descobriment, que fomentin l'autocrítica i el desenvolupament de la capacitat de superació. S'insisteix molt en la comprensió lectora, l'expressió oral i escrita, en el càlcul i la resolució de problemes.

Freudenthal, matemàtic alemany nascut el 1905 i creador de la visió moderna de l'ensenyament matemàtic, tingué la idea d'invertir el punt de partida del desenvolupament del currículum. Es planteja prendre de punt de sortida com aprèn l'infant les matemàtiques. Els currículums de primària i secundària consideren la competència matemàtica com una competència bàsica que ha de ser assolida pels alumnes en aquesta etapa, per ser necessària a la vida escolar, personal i social. Es reconeix el caràcter transversal de la competència matemàtica doncs nombroses situacions quotidianes, i de les diverses àrees, requereixen l'ús de les matemàtiques per poder analitzar-les, interpretar-les i valorar-les. De fet, l'OCDE/PISA (2006) defineix la competència matemàtica com una aptitud d'un individu per identificar i comprendre el paper que juguen les matemàtiques en el

món, aconseguir raonaments ben fonamentats i utilitzar i participar en les matemàtiques segons les necessitats de la seva vida com a ciutadà constructiu, compromès i reflexiu.

La competència matemàtica comporta la capacitat i la voluntat d'emprar formes diverses de pensament (lògic, espacial) i representacions (fórmules, models, gràfics). Per a Niss (1999), la competència matemàtica és l'habilitat d'entendre, jutjar, fer i usar les matemàtiques en una gran varietat de situacions i contextos en els quals tenen, o podrien tenir, un paper important. Per a ell, serveix per utilitzar nombres i les seves operacions bàsiques, els símbols i les formes d'expressió. També preveu el raonament matemàtic per produir i interpretar informacions, per conèixer més aspectes quantitatius i espacials de la realitat i per identificar i resoldre problemes relacionats amb la vida quotidiana. La competència matemàtica diu que ha de contribuir a la identificació de raonaments vàlids i a la valoració de la veracitat dels resultats obtinguts. Niss (1999) pensa que es requereix la selecció de les tècniques adequades per calcular, representar i interpretar a partir de la informació disponible i també l'aplicació d'estratègies de resolució de problemes. Sintetitza el domini i la capacitat matemàtica en vuit competències, sobre les quals s'estructura l'anàlisi del domini de competències matemàtiques efectuada per l'OCDE/PISA:

1. Pensar matemàticament: Construir coneixements matemàtics a partir de situacions on tinguin sentit experimentar, intuir, formular, comprovar i modificar conjectures, relacionar conceptes i fer abstraccions.

2. Raonar matemàticament i argumentar: Fer induccions i deduccions, particularitzar i generalitzar, reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes; argumentar les decisions preses, així com l'elecció dels processos seguits i de les tècniques utilitzades.

3. Comunicar: Comunicar als altres el treball i els descobriments realitzats, tant oralment com per escrit, tot utilitzant el llenguatge matemàtic.

4. Modelar: Traduir la realitat a una estructura matemàtica. Obtenir, interpretar i generar informació amb contingut matemàtic.

5. Plantejar-se i resoldre problemes: Llegir i entendre l'enunciat, generar preguntes relacionades amb una situació-problema, plantejar i resoldre problemes anàlegs, planificar i desenvolupar estratègies de resolució, verificar la validesa de les solucions, cercar altres resolucions, canviar les condicions del problema, sintetitzar els resultats i mètodes emprats, i estendre el problema, mentre es van recollint els resultats que poden ser útils en situacions posteriors.

6. Representar: Interpretar i representar (a través de paraules, gràfics, símbols, nombres i materials) expressions, processos i resultats matemàtics.

7. Utilitzar el llenguatge i operacions simbòliques, formals i tècniques.

8. Utilitzar ajudes i eines: Utilitzar les tècniques matemàtiques bàsiques (per comptar, operar, mesurar, situar-se a l'espai i organitzar i analitzar dades) i els instruments (calculadores i recursos TIC, de dibuix i de mesura) per fer matemàtiques.

D'aquesta manera, el desenvolupament de la competència matemàtica ha de possibilitar la confiança i l'ús espontani dels suports matemàtics i formes de raonar i actuar en els àmbits social, laboral i personal. El domini de la competència matemàtica, segons l'OCDE/PISA (2006), s'organitza a partir de la consideració de tres punts de vista: a) els

contextos on apareixen els problemes; b) els processos que engloben les habilitats i els continguts matemàtics requerits per resoldre problemes; c) les estructures que fan referència als procediments i a les estratègies que s'han d'aplicar per connectar el món real i les matemàtiques, per acabar resolent els problemes plantejats. Observem que d'altres currículums estrangers de qualitat com per exemple el belga o el quebequès, coincideixen a considerar la competència matemàtica com una síntesi de les tres subcompetències següents (Jobin, 2008): resoldre una situació-problema, saber utilitzar i aplicar un raonament matemàtic, i comunicar-se amb l'ajuda del llenguatge matemàtic.

Consideracions metodològiques per al desenvolupament a l'aula

La finalitat en l'educació matemàtica obligatòria tracta d'aconseguir que els coneixements matemàtics s'apliquin de manera natural a la vida quotidiana. L'actitud que s'ha de transmetre ha d'afavorir l'ús del llenguatge matemàtic i l'ús del raonament per justificar els resultats. Però la manera d'ensenyar i d'aprendre matemàtiques escolars no és sempre la mateixa; primer ha de ser contextualitzada, per després, poder fer el pas a l'abstracció. Segons Schoenfeld (1992), per aprendre a pensar matemàticament cal valorar el procés de passar d'un problema expressat en llenguatge quotidià a un altre expressat en llenguatge matemàtic, resoldre'l matemàticament i després explicar la resposta en termes quotidians (matematització). Així, té lloc un procés d'abstracció on s'hi poden aplicar i desenvolupar competències per fer servir instruments per estructurar el pensament i el sentit comú. La competència pot ser entesa com aquell coneixement pràctic sobre quelcom que possibilita la solució de problemes i implica el domini d'habilitats procedimentals i manipuladores. Observem que aquest coneixement podria ser assolit de manera mecànica, sense comprensió. Per aquest motiu s'hi diferencien dos dominis: el pràctic i el comprensiu, o també anomenats comprensió instrumental i relacional. Una causa del nivell tan alt de fracàs escolar en matemàtiques es troba en la metodologia d'ensenyament aplicada. Segons Santaló (1994) els alumnes no cal que només operin, sinó cal que també pensin i raonin. Davant d'aquesta realitat, convindria aplicar metodologies que facilitessin la comprensió, que oferissin una matemàtica lligada a la realitat centrada en la manipulació en la mesura del possible, i no pas enfocada a la repetició mecànica d'algorismes. Castelnuovo i Barra (1980) diuen que com més temps es dediquin els infants a l'estudi d'allò concret, a l'observació, millor comprendran les formes abstractes.

Per desenvolupar la competència matemàtica, s'haurien de considerar les implicacions metodològiques següents (Callís i Mallart, 2011): a) Potenciar situacions de conflicte metacognitiu propiciant que cada alumne pugui descobrir i aprofundir en el seu propi coneixement (sabers, habilitats, interessos...); b) Enfocar l'aprenentatge a partir de la vivenciació i la manipulació; c) Aplicar la vivenciació i manipulació amb l'objectiu de fer un pas cap a l'abstracció i saber generalitzar; d) Enfocar l'aprenentatge a partir de situacions problemàtiques reals; e) Propiciar l'estimació i el plantejament de conjectures; f) Estimular el treball en grup, l'intercanvi d'opinions i la presentació de resultats.

Tenint en compte que aprendre significa potenciar l'evolució de les estructures neurològiques cerebrals, les teories genètiques i constructivistes de l'aprenentatge ens fan parar atenció a les fases del desenvolupament maduratiu en cada persona. Les situacions reals aporten una gran connexió plena de sentit entre aprenentatge i vida. La neurobiologia ha demostrat en múltiples ocasions que l'adquisició i la interiorització de l'aprenentatge no es fan efectives només a partir de la memorització de conceptes i algorismes

ubicats en zones concretes del neocòrtex cerebral, sinó que calen visualitzacions i sentiments localitzats en les estructures del cervell mitjà i el cervell intern, per reforçar i consolidar la comprensió de l'aprenentatge. D'aquesta manera, sembla justificat pensar que el domini matemàtic no consisteix a dominar uns continguts i uns algorismes per resoldre activitats escolars, sinó que cal adquirir competències que permetin generalitzar fets, fer abstraccions, i donar *solució a situacions noves*.

L'aprenentatge s'ha d'entendre com un procés format a partir de diferents nivells comprensius i evolutius, en què, sense el domini i la comprensió d'un d'ells, no es pot aconseguir l'adequada comprensió del següent. Això implica que cal planificar el procés d'aprenentatge segons unes fases de vivenciació, manipulació, simbolització, abstracció, i generalització (Callís, 2010). A la fase de vivenciació, l'alumne ha de ser protagonista del problema, de manera que en la seva resolució intervindrà una integració multisensorial i emocional capaç de proporcionar la comprensió i la representació mental que possibilita un aprofundiment posterior. A l'etapa de manipulació es pot aprofundir, conjecturar hipòtesis i experimentar; es poden comprendre els conceptes i adquirir estratègies de resolució. A continuació, a la fase de simbolització, es transforma el procés vivencial i manipulador en llenguatge comunicatiu de manera que la matemàtica es converteix en el llenguatge útil que permet explicar la realitat. Més tard, ve el moment d'abstracció i generalització, es pot sortir del cas resolt concret per aplicar-lo a noves situacions; per aconseguir una correcta adquisició i interioritzacció de l'aprenentatge matemàtic a l'educació infantil i primària, cal prioritzar la fase didàctica que s'ha d'aplicar a cada cicle. És a dir, en el nivell piagetià de l'estadi sensoriomotor (fins als dos anys) cal emfasitzar les experiències vivencials i manipuladores i prestar menys atenció al treball simbòlic i d'abstracció.

Al llarg de l'estadi preoperacional (entre els dos i set anys), anirà prenent més pes el valor simbòlic. A l'estadi de les operacions concretes (entre els set i dotze anys), l'activitat simbòlica i l'abstracció adquireixen més importància, sense abandonar la vivenciació i la manipulació. Al llarg de l'estadi de les operacions formals (a partir dels 12 anys), la prioritat serà el nivell simbòlic i d'abstracció, sense deixar les connexions amb la vivenciació i la manipulació. Aspectes com la participació, el diàleg, la deducció de fets sense una intervenció directa del professor, o la utilització de material manipulador, resulten importants de cara a implicar els alumnes en activitats significatives d'aprenentatge. Una explicació és perquè permeten portar un procés inductiu cap a l'abstracció i l'anticipació. Bergasa i altres (1996) fixen unes intencions educatives matemàtiques per a la secundària obligatòria que giren al voltant de tres tipus d'aprenentatge: relatius al mètode matemàtic (competència numèrica i geomètrica, desenvolupament i ús del llenguatge matemàtic); relatius a actituds i hàbits de treball; i relatius a l'apreciació del coneixement matemàtic. Per altra banda, si aconseguim alumnes amb una actitud oberta enfront de les dificultats, aconseguirem que abandonin més tard les resolucions de problemes difícils.

Consideracions sobre els docents

Per potenciar el domini competencial matemàtic dels alumnes, cal que els professionals de l'educació el tinguin ben assolit i que sàpiguen analitzar i gestionar (identificar, interpretar, transcriure, transferir i avaluar) els fets matemàtics. Caldria tenir cura de les competències acadèmiques, tècniques, participatives, i personals dels docents. Quant a les competències acadèmiques, ens referim a: posseir i dominar els continguts matemàtics;

conèixer i saber interpretar i representar els processos matemàtics a través de la simbolització; reconèixer les matemàtiques com a instrument de modelització de la realitat; conèixer els aspectes curriculars de l'aprenentatge matemàtic; dominar les bases didàctiques de l'aprenentatge matemàtic. Quant a les competències tècniques, volem dir ser capaç de dur a terme una classe de matemàtiques (interaccions, motivació, procés metodològic per arribar a l'abstracció...); saber dissenyar una seqüència didàctica que consideri l'atenció a la diversitat; saber utilitzar procediments vivencials, manipuladors i tecnològics adients per a l'aprenentatge matemàtic i crear-ne de nous; saber integrar la interdisciplinarietat en les planificacions didàctiques; adquirir estratègies i procediments resolutoris i capacitat de generalització; així com saber utilitzar la recerca-acció per incidir en la innovació. Quant a les competències participatives, es tracta de desenvolupar els processos d'aprenentatge motivacional i adient al nivell. I per fi, amb les competències personals, ens referim a adquirir processos mentals de reflexió crítica i creativa, i a potenciar i desenvolupar el pensament logicomatemàtic (Callís i Mallart, 2011).

Hi ha cert acord sobre el fet que les competències matemàtiques es desenvolupen a partir de la resolució de tasques matemàtiques proposades i que s'avaluen a partir de l'activitat matemàtica desenvolupada en resoldre-les. En el cas de l'avaluació de la competència matemàtica, el professor proposa una tasca, l'alumne la resol desenvolupant certa activitat matemàtica, i després el professor l'analitza trobant-hi evidències d'un cert grau de desenvolupament d'una o diverses competències. Per tant, el professor no només ha de tenir la competència en la resolució de problemes, sinó que ha de seleccionar-los, analitzar el seu potencial per generar una activitat matemàtica rica, modificar-los i també crear-los amb finalitat didàctica (Mallart et al., 2016). El professor ha de tenir criteris per valorar la qualitat de l'activitat matemàtica que porta a terme l'alumne en resoldre el problema que se li ha proposat per modificar-lo si convé facilitar una activitat més rica.

Una de les funcions professionals del docent de matemàtiques consisteix, doncs, a proposar problemes als seus alumnes, que poden haver estat creats per altres, o bé ser modificacions que fa ell de problemes ja creats, i fins i tot, poden ser creats per ell mateix. Cada professor és l'únic que coneix la realitat de la seva aula, i per això és l'únic que pot calibrar adequadament els estímuls i reptes que pot plantejar-hi. La connexió entre crear problemes i la seva relació amb el procés de resolució de problemes, en el cas de la formació de professors, ha introduït a l'Educació Matemàtica una línia d'investigació que, entre d'altres aspectes, s'ha interessat per l'estudi de la incorporació de la creació de problemes en els programes de formació del professorat de matemàtiques (Ellerton, 2013; Tichá i Hošpesová, 2013; Salazar, 2014). Els requisits principals per proposar bons problemes contemplen, a més a més de la competència matemàtica, dos tipus d'eines, les descriptives i les valoratives (Mallart et al., 2016). Les descriptives serveixen per detectar l'activitat matemàtica present a la resolució del problema. Les valoratives poden treballar-se a partir de l'elaboració del llistat de característiques. Quant al procés de modificar un problema a fi de millorar-lo, s'han de tenir presents certs aspectes: a) tenir criteris del que s'ha d'entendre com un bon problema; b) posar un problema; c) resoldre'l; d) fer una anàlisi de l'activitat matemàtica per a la seva resolució; e) formular una proposta de modificació del problema. Un possible llistat de les característiques d'un bon problema presentat per nosaltres s'exposa a continuació agrupat en quatre blocs temàtics:

— Bloc 1: La dificultat no és massa gran i s'intueix que la solució es pot aconseguir. Els continguts tractats i/o les estratègies resolutives són conegudes; s'haurien d'haver

treballat problemes similars anteriorment; relaciona conceptes treballats anteriorment; són adients als coneixements que es tenen; resulta interessant, atractiu i útil de resoldre.

— Bloc 2: S'intueix clarament en què consisteix el problema (determinar quelcom, demostrar, mostrar...). Es pot intuir un camí per conjecturar o obtenir les solucions; tenen dades suficients; s'utilitza un llenguatge clar i familiar; té un objectiu intel·ligible; existeix una coherència entre les dades i el que es demana; existeix un ordre a les dades; s'usen frases curtes i precises; l'enunciat és senzill.

— Bloc 3: S'intueix un camí per obtenir la solució o conjecturar una solució. Es poden establir connexions matemàtiques entre diversos temes (matemàtics o no); afavoreix l'ús de relacions lògiques abans que l'ús mecànic d'algorismes; admet diferents resolucions; no és resoluble en poc temps; no és directament resoluble mitjançant una fórmula o algorisme; haurien de ser autocorregibles.

— Bloc 4: Permet fer verificacions (experimentar) per acceptar o rebutjar les conjectures. Permet establir connexions matemàtiques, ja sigui entre diferents temes matemàtics amb situacions reals o amb altres camps del coneixement; es coneixen altres problemes similars i es pot repetir la manera de procedir; permet un treball experimental inicial; ha de proposar una situació propera/familiar i la resposta ha de ser real; permet crear problemes fent variacions, treballant altres aspectes matemàtics; el plantejament i resolució possibiliten l'adquisició/construcció de coneixements.

Per altra banda, el *National Council of Teachers of Mathematics* manifesta que el currículum hauria de facilitar als alumnes oportunitats per formular problemes interessants basats en una àmplia diversitat de situacions, dins i fora de les matemàtiques (NCTM, 2000). També recomana que els estudiants facin conjectures matemàtiques i aprenguin com generalitzar i estendre problemes. Per això proposa preguntes emergents a fi d'implicar els estudiants més extensivament en la resolució de problemes. Per al NCTM els alumnes haurien de combinar en activitats matemàtiques complexes l'ús de problems oberts, la proposició de problemes, el pensament divergent, la reflexió i la persistència. Ellerton (2013) ha trobat que la capacitat de proposar problemes i la de resoldre'ls estan relacionades.

A l'escola, els alumnes aprenen a centrar-se en els resultats de les seves pròpies resolucions de problemes, sense examinar-ne altres vies i poques vegades tenen l'oportunitat de veure's implicats en algun procés de formulació de problemes (Ellerton, 2013). D'aquesta manera, segons aquesta autora, es dóna un procés de culturització sobre l'acceptació del fet que els problemes que altres creen són els que necessiten resoldre. Però els alumnes de magisteri tendeixen a assumir que ells sempre disposaran d'altres fonts com els llibres de text o Internet, per proveir-se de problemes per plantejar als seus futurs alumnes. El fet de proposar problemes en la formació del professorat de matemàtiques pot percebre's com a l'objectiu o com a mitjà per ajudar a desenvolupar models mentals, modelar fenòmens i aplicar diverses representacions. Crespo (2003) comenta que mentre s'ha focalitzat l'atenció en l'habilitat per resoldre problemes, s'ha deixat de banda la seva habilitat per construir i proposar problemes. Molts mestres no semblen haver desenvolupat habilitats en la proposició de problemes (Singer et al., 2011). En la pràctica de l'ensenyament, els mestres haurien de treballar la competència de proposar problemes, com

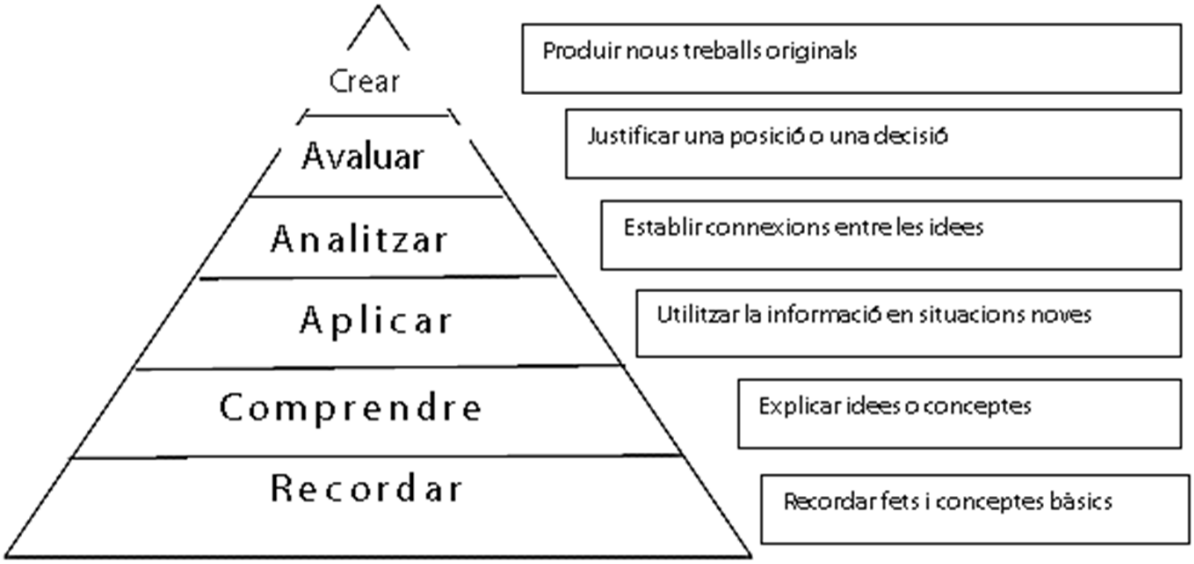
a mínim, en la reformulació d'un enunciat donat, per poder adaptar-lo a un propòsit educatiu. Salazar (2014) assenyala la importància de considerar una fase prèvia a la variació i creació de problemes, en la qual, atès un problema, es pensi en la intenció que tingué el seu autor en crear-lo.

Matemàtiques i creativitat

Creativitat com a objectiu

A la segona meitat del segle XX es va divulgar la coneguda classificació dels objectius educatius de Bloom i va ser criticada per mostrar una visió conductista com era natural per l'època. Recentment, Anderson i Krathwohl (2001) han revisat a fons aquella taxonomia i n'han modificat els nivells superiors. L'han mantinguda en els primers estadis cognitius (recordar, comprendre, aplicar, analitzar) i l'han actualitzada a partir d'aquí.

Figura 1. Taxonomia dels objectius de l'educació de Bloom, revisats per Anderson i Krathwohl (2001), adaptació del nou domini cognitiu



Per si no estava prou clar o quedés encara algun dubte, una de les més importants formulacions dels objectius educatius proposa com a màxima aspiració a què es pot arribar en el domini cognitiu, la creativitat. Concepte que Guilford (1950) explicava com aquella capacitat mental caracteritzada per la fluïdesa, la flexibilitat, l'originalitat, per la disposició a establir associacions llunyanes, pel fet de tenir sensibilitat davant dels problemes i per la possibilitat de redefinir les qüestions.

En la nova taxonomia revisada, crear serà el nivell més alt possible d'objectius educatius. Significa unir elements per tal de constituir un tot coherent o funcional. Es tracta de formar un nou producte a partir de la reorganització mental d'altres elements o parts que abans no hi eren presents. Comprèn tres fases: generar, planejar i produir, que també es poden anomenar: conjecturar, dissenyar i construir. Verbs, aquests últims, més utilitzats en matemàtiques.

Didàctica de la resolució de problemes

Les matemàtiques difícilment s'aprenen per transmissió directa del que s'explica a l'aula o del que es llegeix en els llibres de text, sinó que s'aprenen en interacció amb situacions

problemàtiques i amb altres, que obliguen a l'alumne a anar modificant la seva estructura cognitiva mitjançant l'experimentació, plantejant-se preguntes, particularitzant situacions, generalitzant resultats o trobant contraexemples. Aquests processos requereixen predisposició per part d'aquell que aprèn. L'ensenyament de les matemàtiques té a veure amb un ensenyament que promou un aprenentatge productiu i creatiu. La construcció del coneixement matemàtic és inseparable de l'activitat concreta sobre els objectes, de la intuïció i de les aproximacions inductives imposades per tasques determinades i la resolució de problemes particulars. És difícil entendre el desenvolupament del pensament matemàtic dels alumnes quan resolen problemes al marge de la creativitat. Solucionar problemes és una mostra de pensament creatiu i, així, el científic creatiu és aquell que fa sorgir la resposta i produeix solucions. D'aquesta manera és difícil separar en una persona el domini afectiu del seu pensament creatiu.

La investigació de la naturalesa de la creativitat científica pren interès especialment a meitats del segle passat. Guilford pronuncià la conferència titulada «*Creativity*» al 1950, Puig Adam al 1960 amb la seva metodologia de l'ensenyament de les matemàtiques emfasitzà el guiatge de l'activitat creadora i descobridora, activitat que estimulava l'interès pel coneixement. Romberg i Carpenter (1986) reconegueren l'existència d'estudis que tractaven sobre la resolució de problemes i el comportament creatiu. A casa nostra, però, ja s'havia interessat profundament pel tema Joaquim Ruyra (1938) i no només en el camp de la creació literària.

Guilford (1950) suggereix com a trets principals de la creativitat la fluïdesa, la flexibilitat, l'originalitat, l'elaboració, l'anàlisi, la síntesi i la redefinició. Logan (1980) contempla com a característiques determinants: fluïdesa, flexibilitat, originalitat, elaboració, redefinició, inventiva, enginy, anàlisi i síntesi, independència, tolerància a l'ambigüitat, curiositat, desafiament al risc, obertura, comunicació i sensibilitat. A més, Ricardo Marín i Saturnino de la Torre (1991) proposen que els trets particulars de la creativitat són: productivitat, flexibilitat, originalitat, elaboració, anàlisi, síntesi, obertura mental, comunicació, sensibilitat a problemes i inventiva. Altrament, Sternberg (1999) presenta com a indicadors: pensament analític, pensament sintètic, pensament pràctic, personalitat, motivació i context ambiental. Al seu torn, Violant (2006) valora l'existència de creativitat observant: originalitat, flexibilitat, productivitat o fluïdesa, elaboració, anàlisi, síntesi, obertura mental, comunicació, sensibilitat per als problemes, redefinició i nivell d'inventiva. Romo (2008) descriu la perseverança, la capacitat d'assumir riscos, la tolerància a l'ambigüitat, l'obertura a l'experiència, l'autoconfiança, la independència, la motivació intrínseca i la motivació d'assoliment.

Per analitzar aquest constructe en la resolució de problemes matemàtics (Mallart i Deulofeu, 2017) hem caracteritzat un grup de set indicadors, escollits com els més representatius i comuns: originalitat, flexibilitat, elaboració, anàlisi, síntesi, comunicació i redefinició:

1. *Originalitat*: capacitat per produir respostes novedoses, poc convencionals, úniques, irrepetibles.
2. *Flexibilitat*: capacitat de desplaçar-se d'una idea a una altra, d'un context a un altre, capacitat de donar respostes variades, de modificar idees, de replantejar-se certs aspectes, fent reorientacions i transformacions de les situacions o objectes originals, superant la pròpia rigidesa. Suposa la capacitat de canviar la manera de pensar i poder contemplar un problema des de perspectives diferents.

3. *Elaboració*: capacitat per desenvolupar o perfeccionar una idea o producció original que aconsegueixi alts nivells de complexitat i detall. És la capacitat d'agregar elements en processar la informació, ampliant i aprofundint.
4. *Anàlisi*: capacitat per estudiar una realitat determinant els límits de l'objecte, criteris de descomposició del tot, determinant les parts del tot i tractant cada part per separat per tal de descobrir nous sentits i relacions entre els elements del conjunt. L'anàlisi d'un objecte es realitza a partir de la relació existent entre els elements que el conformen com un tot.
5. *Síntesi*: capacitat per comparar les parts entre sí, trets comuns i diferències, i descobrir nexes entre les parts per elaborar conclusions sobre un nou tot; capacitat per elaborar esquemes que permetin organitzar la informació i extreure'n els trets més valuosos.
6. *Comunicació*: capacitat de transmetre i compartir missatges de manera convincent; es capten les necessitats insatisfetes com a missatges, mentre es van resolent aquestes necessitats com a missatges de resposta. La seva creació serà exitosa si obté respostes positives i s'establirà així un cicle de comunicació.
7. *Redefinició*: capacitat de reestructuració i reconstrucció a partir d'informació coneguda, amb l'objecte de transformar un fenomen concret de la realitat, trobant aplicacions i definicions diferents a les habituals.

Es pot afegir que Pásztor, Molnár i Csapó (2015) manifestaren que la creativitat jugava un paper primordial degut a la seva connexió amb altres processos com la resolució de problemes i la creació de problemes amb finalitats didàctiques. A més, Sriraman (2005) constatà que els professors no solen encoratjar la creativitat dels seus alumnes. La creació de problemes estimula la creativitat i ajuda a resoldre problemes, com molts autors han subratllat. A la fase de comprensió de l'enunciat, el professor podria crear un altre problema per tal que l'alumne reconegués com a més rellevant per a la seva vida quotidiana. A la fase de revisió de la solució (Polya, 1945) també s'inclou la reformulació del problema original. Murray, Olivier i Human (1998) demostraven que els alumnes que creaven problemes tenien una capacitat superior per usar conceptes i habilitats per solucionar altres problemes. Walter i Brown (1977) investigaren la connexió entre creació de problemes i la seva resolució. Van trobar que l'èxit en una de les anteriors habilitats tenia una forta influència sobre l'altra, i viceversa. Les habilitats per a cada tasca estaven relacionades de manera molt propera. De fet, diuen que crear problemes implica formular nous problemes i reformular situacions donades. Els alumnes poden crear nous problemes quan resolen un problema complex. Ells poden reformular-ne un per reduir les quantitats que intervenen, o investigar un cas específic per comprendre millor el problema. Leung i Silver (1997) comprovaren que la creació de problemes ajudava a millorar les habilitats de resolució de problemes i tenia un impacte positiu en les estratègies resolutives.

Al seu torn, English (1997) també estudià la creació de problemes, i posà de relleu que els estudiants, per crear problemes, necessitaven els coneixements pertinents implicats. Aquesta autora digué que els estudiants havien d'entendre què era un problema, reconèixer la seva estructura, i identificar estructures similars per ser capaç de crear un problema nou. Insistí en el fet que l'habilitat dels estudiants d'entendre una situació matemàtica millorava la seva habilitat de crear nous problemes. També subratllà que l'habilitat de crear i resoldre nous problemes permetia descobrir les pròpies mancances, comprovar

els propis errors, i conèixer les pròpies estratègies i dificultats, cosa que els tornaria millors resolutors de problemes. Es detectà una millora en resolució de problemes no rutinaris. Ellerton (2013) mostrà que els problemes creats per estudiants que tenien habilitats matemàtiques més desenvolupades requerien càlculs més complexos, presentaven moltes més operacions, i implicaven un ús del llenguatge matemàtic més fluid; a més a més, les formulacions eren més coherents. La creació de problemes ofereix als estudiants l'oportunitat de mostrar els seus coneixements i el que poden fer amb ells; però també permet als professors observar patrons d'aprenentatge i aprofundir en el pensament matemàtic del seu alumnat. Lin (2004) assenyalà que un gran avantatge de crear problemes és el fet de constituir un instrument d'avaluació sobre l'aprenentatge dels estudiants que es troba immers en mig del procés d'ensenyament i aprenentatge, i no pas aïllat.

Des de la perspectiva de les competències matemàtiques, crear problemes amb propòsits educatius és un gran repte per ensenyar competències (Tichá i Hošpesová, 2013). Analitzar la comprensió dels conceptes matemàtics implicats en els problemes que han creat els alumnes, podria ser una manera de determinar, a més de la seva comprensió, les seves habilitats matemàtiques, la creativitat, aprofundir en la comprensió de les relacions entre els diferents conceptes, patrons, i l'ús dels nombres i quantitats. De fet, la creació de problemes podria usar-se per millorar les competències de resolució de problemes dels alumnes. Els professors podrien assegurar-se que els continguts matemàtics es focalitzessin en situacions familiars per als seus estudiants. Però les activitats de crear problemes no són una pràctica comuna a les classes de matemàtiques; prevalen les activitats de resolució de problemes. Potser perquè els professors no tenen prou confiança en usar activitats de creació de problemes (Leung i Silver, 1997). Per la seva banda, Tichá i Hošpesová (2013) consideren que un professor no ha de saber resoldre només problemes, també ha de saber modificar-ne i crear-ne amb propòsits didàctics. Els professors han de desenvolupar les habilitats d'analitzar i d'intervenir per avaluar els problemes que ells usen (Breda, Pino-Fan i Font, 2017). En la formació del professorat, aquestes habilitats poden desenvolupar-se amb tasques que impliquin dominar l'anàlisi didàctica. Una d'aquestes tasques pot consistir a crear problemes des del punt de vista del docent. Es pot considerar que crear problemes és un procés a través del qual s'obté un nou problema matemàtic variant un problema donat o creant-ne un de nou. Aquest procés s'adopta sota la resposta a certes necessitats didàctiques matemàtiques (Mallart et al., 2016). Brown i Walter (1993) mostraren que si els estudiants creen problemes i els resolen, es tornen més actius en el seu procés d'aprenentatge.

Dificultats dels futurs mestres per crear problemes

Els docents haurien de practicar la competència de crear problemes, almenys amb la reformulació dels enunciats d'altres problemes existents, mentre intenten adaptar-los per a un propòsit educatiu. Però resulta que els futurs mestres no hi estan gaire interessats perquè no en saben prou (Mallart et al., 2018). Només li veuen la utilitat a l'hora d'avaluar, però en canvi, crear problemes estimula la creativitat, contribueix a precisar situacions, matisa el llenguatge utilitzat i els conceptes que hi intervenen, afina proposicions, processos i argumentacions. Els estudiants, amb la creació de problemes, tenen l'oportunitat de generalitzar, connectar coneixements, trobar contextos propers i atractius i modificar situacions. En aquest estudi on es treballa amb futurs mestres la creació de problemes amb finalitats didàctiques, es recullen les següents consideracions per part dels futurs docents: els problemes han de provocar l'interès de ser resolts; els enunciats no poden

ser ni difícils ni massa llargs, sinó que haurien de ser precisos i usar un llenguatge familiar i proper; els enunciats poden ajudar a la comprensió si inclouen il·lustracions; els problemes haurien de ser autocorregibles; els contextos idonis són aquells propers al resolutor. A més a més, en aquest estudi, els futurs mestres consideren que la part més difícil de crear problemes és la d'adequar el nivell de dificultat al nivell educatiu; confessen que no saben calibrar la dificultat. També es mostra que els futurs docents tenen dificultats a trobar un context familiar dels problemes, és a dir, a connectar les dades, expressar un enunciat ben formulat i clar, amb tota la informació necessària, que pugui engrescar els estudiants per trobar la solució, que permeti diverses solucions i que ofereixi la possibilitat de resoldre'l manipulativament. Aquest estudi reflecteix que han tingut moltes oportunitats per practicar la resolució de problemes en detriment de la seva creació, idea reafirmada per Sriraman (2005) i Breda et al. (2017).

Fases del procés creatiu

Anderson i Krathwohl (2001) proposaven tres fases per al procés creatiu. A la primera, *generar*, té lloc la representació del problema, s'intenta comprendre'l i es generen diverses solucions possibles. Aquesta fase és divergent perquè es consideren diferents possibles solucions, mentre es va intentant comprendre. La segona és una fase convergent, es tracta de *planificar* l'algorisme de l'acció a partir del mètode triat. Per últim, *produir*, s'executa el pla construint la solució. Aquest procés és explicat per aquests autors en tres fases cognitives consecutives.

És molt més present en els experts sobre creativitat una visió en quatre fases que se solen atribuir a Wallas o a Guilford, però que nosaltres hem trobat molt anteriorment en un matemàtic com Poincaré. Precisament, el gran escriptor i acadèmic de Blanes, Joaquim Ruyra, en un treball de 1938 sobre l'educació de la inventiva, es va fonamentar en aquest famós matemàtic francès, interessat per la psicologia del procés creatiu. No desenvoluparem el sentit de cada fase, però per a la nostra finalitat ens fixarem en el pas entre la segona i la tercera.

Taula 1. Fases del procés creatiu segons diferents autors

Poincaré	Wallas	Haefele	Guilford	De la Torre
Preparació	Preparació	Preparació	Motivació	Incitació
Incubació	Incubació	Incubació	Transformacions no conscients/Informació	Problematització Climatització
Il·luminació	Inspiració	*Insight*	Intuïció	Estimulació
Verificació	Elaboració, verificació	Verificació	Producte Avaluació	Estimació Orientació

Després d'un primer moment de preparació segueix un període més o menys llarg anomenat per Poincaré (1908) i també per altres autors fase d'incubació. Durant aquesta fase, el treball mental va essent inconscient. Fins i tot sembla que no s'està fent res, però l'activitat cerebral no para. I és en un moment posterior, difícil de predir, quan es produirà en cada un dels subjectes, l'arribada a la solució més o menys llargament preparada i esperada. És en aquest pas de la incubació a la il·luminació on hem començat a centrar el nostre interès per ajudar els estudiants a seguir el procés exitosament. Això requerirà

d'un treball de recerca per entendre millor el procés i poder intervenir-hi a fi de millorar l'aprenentatge.

Discussió i proposta

Des de l'assignatura de matemàtiques, també, el currículum hauria de contemplar el desenvolupament de la creativitat. A través de la metodologia, del contingut, dels objectius i competències programades. I per les activitats inductives preparades, tals com la resolució i la creació de problemes. Per això, cal ser molt generosos en el temps dedicat, ja que algunes fases del procés creatiu poden requerir temps més amplis.

Des de totes les disciplines científiques es pot suggerir la relació dels processos i capacitats següents, presents en la resolució de problemes, no importa de quina disciplina es tracti: observació, identificació, relació, codificació i representació, interpretació, inferència i anàlisi, modelització. En particular, des de l'àrea de matemàtiques i tenint en compte les fases de Polya, es pot fer una classificació dels indicadors creatius de la resolució de problemes proposats per Mallart i Deulofeu (2017) com mostra la taula següent:

Taula 2. Classificació dels indicadors creatius d'una resolució de problemes proposats per Mallart i Deulofeu segons les fases del procés de resolució

Fase II Disseny d'estratègia resolutiva	Fase III Execució de l'estratègia resolutiva	Fase IV Revisió de la solució
Originalitat Flexibilitat	Elaboració Anàlisi	Síntesi Comunicació Redefinició

Font: Elaboració pròpia.

És a dir, per analitzar com els alumnes dissenyen estratègies per resoldre un problema de manera creativa, es consideren els indicadors d'originalitat i flexibilitat. Per demostrar com s'executen de manera creativa les estratègies de resolució dissenyades s'observen els indicadors d'elaboració i anàlisi. I per comprovar com revisen la solució amb un enfocament creatiu s'examinen els indicadors de síntesi, comunicació i redefinició.

Des d'aquest punt de vista, recordem que la Fase I implica la comprensió de l'enunciat. Així, caldria ser conscients que les fases de preparació i d'incubació comencen a l'inici amb la lectura de l'enunciat. Són fases, segons Poincaré, Wallas o Haefele, fonamentals per tal que es produeixi *l'Insight*. No es pot dur a l'aula la resolució de problemes amb presses si es pretén que els alumnes siguin creatius. Reconeixem també que les presses, moltes vegades, són autoimposades (Polya, 1945) pel nerviosisme dels mateixos resolutors, la qual cosa tampoc ajuda al desenvolupament de la creativitat. Fixem-nos que resulta cabdal que el professor tingui cura d'un ambient de treball calmat i reflexiu per afavorir que durant la segona fase l'alumne provi diferents camins (originalitat i flexibilitat), i que durant la tercera fase elabori la seva execució i l'analitzi. Però la fase que serveix especialment per aprendre el que s'ha fet és la quarta fase, la de revisió. En aquesta etapa, l'alumne ha de ser capaç de sintetitzar, comunicar, i tant de bo, redefinir. Per a totes aquestes fases, cal facilitar temps suficient i transmetre tranquil·litat si el que es vol és treballar la creativitat. Aquesta seria una recomanació important per treballar la creativitat dins de l'aula.

Per tot plegat, resulta convenient assumir la necessitat de provocar permanentment la reflexió explícita sobre aquestes capacitats, tot afavorint una aprehensió implícita i, sobretot, considerar aquestes capacitats com a no estàtiques.

En aquest sentit, treballar les competències comunes a la resolució de problemes de totes les disciplines significa contribuir a la formació interdisciplinària i promoure l'esperit científic. En definitiva, valorar els aspectes creatius implica dedicar els esforços a allò que Ruyra anomenava *la gran virtut dels intel·lectuals* i que Poincaré relacionava amb aspectes emocionals.

> … la sensació de bellesa matemàtica, de l'harmonia dels nombres i les formes, de l'elegància geomètrica, que és una veritable sensació estètica, coneguda per tots els matemàtics autèntics, i que, en conseqüència, pertany a la sensibilitat emotiva. (Poincaré, 1995, p. 3-4)

En suma, la resolució de problemes matemàtics constitueix una empresa humana i, si es vol, humanitzadora, que serveix per a tots els àmbits de la vida amb una clara capacitat de transferència per a la resolució de tot tipus de problemes.

Referències

Anderson, L.W.; Krathwohl, D.R. [eds.] (2001) *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Nova York, Addison Wesley Longman.

Bergasa, J.; Eraso, M.D.; García, M.V.; Sara, S. (1996) *Matemáticas: materiales didácticos: Primer ciclo de la enseñanza secundaria obligatoria*. Pamplona, Gobierno de Navarra. Departamento de Educación, Cultura, Deporte y Juventud.

Blanco, L.; Caballero, A.; Guerrero, E. (2009) «El dominio afectivo en la construcción del conocimiento didáctico del contenido sobre resolución de problemas de matemáticas». *Enseñanza de las Ciencias*, *Número Extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias*, p. 362-365.

Breda, A.; Pino-Fan, L.; Font, V. (2017) «Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice». *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 13(6), p. 1893-1918. Disponible a: https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a [accés: 10-2-2018].

Brown, S.; Walter, M. (1993) *Problem posing*. New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Callís, J. (2010) «De la vivenciació a l'abstracció o el camí vers la competència matemàtica». *Perspectiva Escolar*, 341, p. 2-16.

Callís, J.; Mallart, A. (2011) «Adquisició i desenvolupament de la competència matemàtica». *Revista Catalana de Pedagogia,* 7, p. 113-136.

Castelnuovo E.; Barra M. (1980) *La mathématique dans la réalité*. París, CEDIC.

Crespo, S. (2003), «Learning to Pose Mathematical Problems: Exploring changes in preservice teachers' practices». *Educational Studies in Mathematics,* 52, p. 243-270.

D'Ambrosio, U. (1999) «Educació matemàtica per a una civilització en procés de canvi». *Temps d'Educació,* 22, p. 29-51.

Ellerton, N. (2013) «Engaging Pre-Service Middle-School Teacher-Education Students in Mathematical Problem Posing: Development of an active learning framework», *Educational Studies in Mathematics,* 83(1), p. 87-101.

English, L. (1997) «The development of fifth-grade children's problem-posing abilities». *Educational Studies in Mathematics,* 34(3), p. 183-217. Disponible a: https://doi.org/10.1023/A:1002963618035 [accés: 15.1.2017]

Freudenthal, H. (1983) *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Reidel.

Guilford, J.P. (1950) «Creativity». *American Psychologist, 5*, p. 444-445. Disponible a: http://dx.doi.org/10.1037/h0063487 [accés: 5.8.2017].

Haefele, J. (1962) *Creativity and Innovation.* New York, Chapman & Hall.

Jobin, G. (2008) «Les compétences mathématiques du PDF». Disponible a: «http://www.gilles-jobin.org/jobineries/index.php?Muequeries» [accés: 20.11.2017].

Kilpatrick, J. (1985) «A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving», a Silver, E.A. [ed.] *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale, Lawrence Erlbaum, p. 1-15.

Leung, S.; Silver, E. (1997) «The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers». *Mathematics Education Research Journal,* 9(1), p. 5-24. Disponible a: https://doi.org/10.1007/BF03217299 [accés: 1.8.2017].

Lin, P. (2004) «Supporting teachers on designing problem-posing tasks as a tool of assessment to understand students' mathematical learning», a Høines, M.J.; Fuglestad, A.B. [eds.] *Proceedings of the 28th Conference International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3. Bergen, Bergen University College, p. 257–264.

Logan, G. (1980) *Estrategias para una enseñanza creativa*. Barcelona, Oikos-tau.

Mallart, A. (2009) «Enseñar matemáticas con conciencia transdisciplinar», a Pujol, M.A.; de la Torre, S. [eds.] *Educar con otra conciencia. Una mirada ecoformadora y creativa en la enseñanza*. Barcelona, Davinci, p. 215-224.

Mallart, A.; Font, V.; Diez, J. (2018) «Case Study on Mathematics Pre-service Teachers' Difficulties in Problem Posing». *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* 14(4), p. 1465-1481. Disponible a: https://doi.org/10.29333/ejmste/83682 [accés: 20.2.2018].

Mallart, A.; Font, V.; Malaspina, U. (2016) «Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros». *Perfiles educativos,* 38(152), 14-30.

Mallart, A.; Deulofeu, J. (2017) «Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas». *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(2), 4, p. 193-222. Disponible a: http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2023 [accés: 25.10.2017]

Marín, R.; de la Torre, S. (1991) *Manual de la creatividad*. Barcelona, Vicens Vives.

Martínez, A. (1999) «Estudio sobre la implicación lógica: modelos prácticos, modelos teóricos y claridad de las situaciones modélicas». *Suma,* 32(novembre), p. 23-24.

Murray, H.; Olivier, A.; Human, P. (1998) «Learning through problem solving», a Olivier, A.; Newstead, K. [eds.] *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1. Stellenbosch, PME, p. 169-185.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM.

Nicolescu, B. (1996) *La Transdisciplinarité. Manifeste*. Monaco, Éditions du Rocher.

Niss, M. (1999) «Competencies and Subject Description». *Uddanneise,* 9, p. 21-29.

OCDE/PISA (2006) *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006*. París, OECD. Disponible a: http://dx.doi.org/10.1787/9789264026407-en [accés: 10.11.2008].

Pásztor, A.; Molnár, G.; Csapó, B. (2015) «Technology-based assessment of creativity in educational context: the case of divergent thinking and its relation to mathematical achievement». *Thinking skills and Creativity*, *Special Issue: 21st Century Skills,* 18, p. 32-42. Disponible a: https://doi.org/10.1016/j.tsc.2015.05.004 [accés 20.6.2017].

Perrenoud, Ph. (2000) *L'approche par competences, ¿une réponse à l'échec scolaire?* Ginebra, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Éducation. Université de Genève.

Poincaré, H. (1908) *Science et méthode.* París, Flammarion.

Poincaré, H. (1995) «La creación matemática» (extracte d'una conferència pronunciada a principis del s. XX a la Societat Psicològica de París). *Investigación y Ciencia. Temas 1,* p. 2-4.

Polya, G. (1945) *How to solve it*. Princeton, Princeton University Press.

Puig Adam, P. (1960) *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid, MEC.

Romberg, T.; Carpenter, T. (1986) «Research in teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry», a Wittrock, M.C. [ed.] *Handbook of research on teaching*. Nova York, Macmillan, p. 850-873.

Romo, M. (2008) *Epistemología y psicología.* Madrid, Pirámide.

Ruyra, J. (1938) *L'educació de la inventiva.* Barcelona: Rosa dels vents.

Salazar, L. (2014) «Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto de matemática», *Paradigma*, XXXV(1), p. 55-77.

Santaló, L. (1994) *La Matemática, una filosofía y una técnica*. Barcelona, Ariel.

Schoenfeld, A.H. (1992) «Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics», a Grouws, D.A. [ed.] *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. Nova York, MacMillan, p. 334-389.

Singer, F.; Ellerton, N.; Cai, J.; Leung, E. (2011) «Problem Posing in Mathematics Learning and Teaching: A research agenda», a Ubuz, B. [ed.] *Developing Mathematical Thinking*, 1, Ankara, PME, p. 137-166.

Sriraman, B. (2005) «Are giftedness & creativity synonyms in mathematics? An analysis of constructs within the professional and school realms». *The Journal of Secondary Gifted Education,* 17, p. 20–36. Disponible a: https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389 [accés: 3.9.2017].

Sternberg, R.J. (1999) *Handbook of Creativity.* New York, Cambridge University Press.

Tichá, M.; Hošpesová, A. (2013) «Developing Teachers' Subject Didactic Competence through Problem Posing». *Educational Studies in Mathematics,* LXXXIII(1), p. 133-143.

Violant, V. (2006) «Indicadores clásicos en la evaluación de la creatividad», a Torre, S.; Violant, V. [eds.] *Comprender y evaluar la creatividad.* Archidona, Aljibe, p. 169-179.

Wallas, G. (1926) *The Art of Thought*. New York, Harcourt Brace.

Walter, M.; Brown, S. (1977) «Problem posing and problem solving: an illustration of their interdependence». *Mathematics Teacher*, 70(1), p. 5-13.

Resolución de problemas: creatividad y didáctica matemática

Resumen: Un currículum es una planificación educativa donde se concretan las competencias a conseguir para vivir en sociedad. La competencia matemática (transdisciplinaria) es una aptitud para identificar matemáticas en la vida, elaborar razonamientos fundamentados, usar técnicas para calcular, representar e interpretar datos disponibles, y aplicar estrategias de resolución de problemas (RP). Para potenciar el dominio competencial matemático, los docentes deben saber identificar, interpretar, transcribir, transferir, y evaluar los hechos matemáticos. La RP es creativa, y crear es el nivel más alto de objetivos educativos. Los futuros maestros no están interesados en crear problemas para favorecer un correcto aprendizaje de la RP porque no saben adecuar la dificultad a un nivel educativo ni encontrar un contexto familiar. Motivados por entender y mejorar el aprendizaje del proceso de RP, nos proponemos el estudio de la fase de iluminación.

Palabras clave: Creatividad, didáctica de las matemáticas, currículum, competencia matemática, resolución de problemas, creación de problemas, formación del profesorado de matemáticas.

La résolution de problèmes : créativité et didactique des mathématiques

Résumé : Un curriculum est une planification éducative qui énonce les compétences à atteindre pour vivre en société. La compétence mathématique (transdisciplinaire) est une aptitude à trouver des mathématiques dans la vie, à élaborer des raisonnements fondés, à utiliser des techniques de calcul, à représenter et à interpréter des données disponibles, et à appliquer des stratégies de résolution de problèmes (RP). Pour stimuler la maîtrise de la compétence mathématique, les enseignants doivent être capables d'identifier, d'interpréter, de transcrire, de transférer et d'évaluer les faits mathématiques. La RP est créative, et créer est le niveau le plus élevé des objectifs éducatifs. Les futurs enseignants ne sont pas intéressés par la création de problèmes visant à favoriser un correct apprentissage de la RP parce qu'ils ne savent pas adapter la difficulté à un niveau éducatif ni trouver un contexte familial. Soucieux de comprendre et d'améliorer l'apprentissage du processus de RP, nous envisageons d'étudier la phase d'illumination.

Mots clés : Créativité, didactique des mathématiques, curriculum, compétence mathématique, résolution de problèmes, création de problèmes, formation des enseignants de mathématiques.

Problem solving: creativity and maths teaching

Abstract: A syllabus is an educational plan that specifies the competences needed to live in society. A (transdisciplinary) competence in maths is an ability to find maths in life, develop well-reasoned arguments, use techniques to calculate, represent and interpret available data, and apply problem-solving (PS) strategies. To strengthen the domain of maths competence, instructors need to identify, interpret, transcribe, transfer and assess mathematical facts. PS is creative, and being able to create is the highest level of education's aims. Future instructors are not interested in creating problems to encourage a proper learning of PS because they do not know how to adapt the difficulty to a particular educational level or find a family context. In order to understand and improve learning of the PS process, we propose to study Alain Connes's notion of mathematical illumination.

Keywords: Creativity, maths teaching, syllabus, maths competence, problem solving, problem creation, maths teacher training.