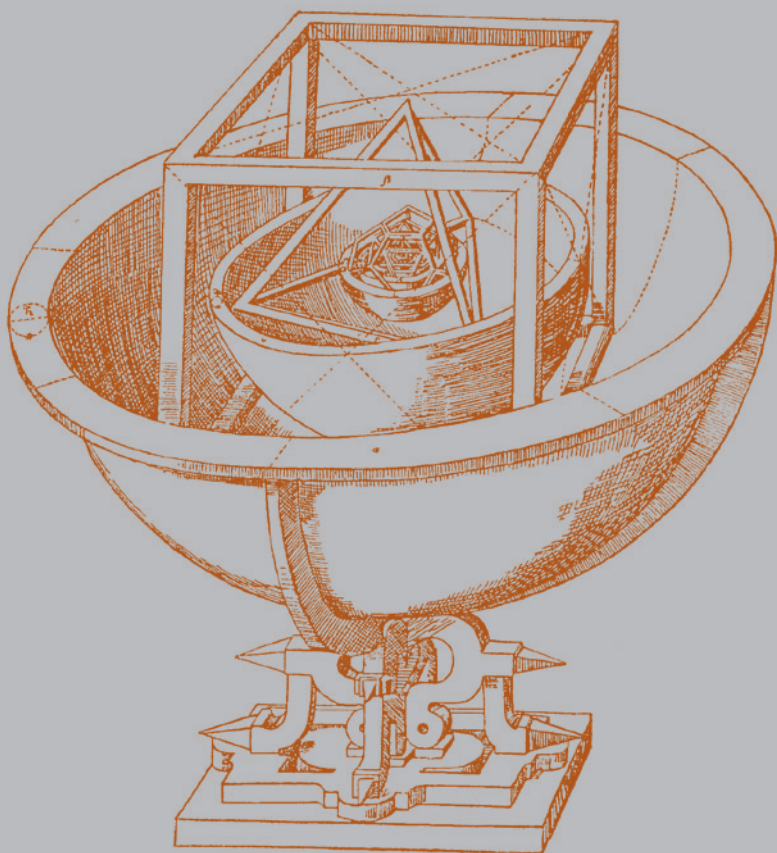
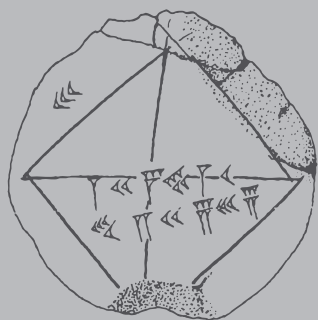


HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

Des de Mesopotàmia
al Renaixement

Carlos Dorce Polo



HISTÒRIA DE LA MATEMÀTICA

Des de Mesopotàmia al Renaixement

Carlos Dorce i Polo

Sumari

PROEMI. <i>Josep Pla i Carrera</i>	11
INTRODUCCIÓ	15
LES MATEMÀTIQUES A MESOPOTÀMIA	17
LES MATEMÀTIQUES A L'ANTIC EGIPTE	41
LA PRIMERA MATEMÀTICA GREGA	73
EUCLIDES D'ALEXANDRIA	105
ARQUIMEDES DE SIRACUSA	137
EL FINAL DE L'ÈPOCA GREGA	171
L'HEGEMONIA ÀRAB	195
LES MATEMÀTIQUES A AL-ÀNDALUS	235
LEONARDO DE PISA, FIBONACCI	257
LA RESOLUCIÓ DE LA CÚBICA	281
Annex. ELS GRANS MATEMÀTICS CITATS EN AQUEST LLIBRE	313

Arquimedes de Siracusa

LA FIGURA D'ARQUIMEDES

Després d'haver estudiat Euclides, s'ha d'analitzar la figura d'un altre dels matemàtics grecs més importants de la història: Arquimedes. Per situar-lo, cal remuntar-se a la Siracusa de les guerres púniques, concretament en el moment exacte (212 aC) de la seva capitulació davant les tropes romanes del general Marc Claudi Marcel (c. 268 aC-208 aC). En el llibre xxv.31 de la seva *Història de Roma des de la seva fundació*, l'historiador romà Titus Livi (c. 59 aC-17 dC) explica que Siracusa:

[...] va ser lliurada a les tropes perquè fos saquejada a plaer [...]. Es van cometre moltes brutalitats a sang calenta per la cobdícia dels guanyys, i en la seva crònica [de Marcel] hi figura que mentre Arquimedes estava treballant sobre unes figures que havia dibuixat al terra independentment de l'espantós soroll de l'exèrcit devastant la ciutat capturada, un soldat que no sabia qui era el va assassinar. Marcel va entristir-se per aquest fet; va fer que l'enterressin apropiadament i va buscar els seus parents per als qui el nom i memòria d'Arquimedes havia de ser un honor.

Seguint Titus Livi, Valeri Màxim (c. 20 aC-c. 50 dC), en el llibre viii.7 de les seves *Dites i fets memorables*, també va dedicar un espai a la llegenda de la seva mort i el mateix va fer Plutarc en les seves *Vides paral·leles*:

[...] però res va afectar més Marcel que la mort d'Arquimedes [...] qui, amb la intenció d'elaborar un diagrama per a un problema, va fixar la seva ment i els seus ulls en l'objecte de la seva especulació i no va adonar-se de la incursió dels romans ni que la ciutat havia estat capturada. En el seu moment d'estudi i contemplació, un soldat va acostar-se-li i li va ordenar que seguís Marcel, cosa que va declinar fer abans de no haver demostrat el problema, motiu pel qual el soldat, enfurit, va treure la seva espasa i el va travessar. Uns altres escriuen que un soldat romà se li va abalançar amb l'espasa i es va oferir per matar-lo i que Arquimedes,

girant-se, el va parar, ja que no podia deixar la seva feina inacabada i imperfecta. El soldat [...] el va matar immediatament. D'altres expliquen un cop més com Arquimedes portava instruments matemàtics a Marcel com ara rellotges de sol, esferes i angles per poder mesurar la magnitud del Sol a simple vista. Alguns soldats el van veure i, pensant-se que portava or en una gerra, el van matar. És cert que la seva mort va afligir molt Marcel i sempre es va considerar un assassí per la seva mort, motiu pel qual va buscar la seva família per honrar-los en senyal de favor.

Donant per certa la seva mort a mans d'un soldat romà, la tradició bizantina —i, per tant, tardana— li assigna una vida de setanta-cinc anys, de manera que es pot afirmar que Arquimedes va viure del 287 aC al 212 aC. A l'*Arenari*, el mateix Arquimedes diu que son pare era l'astrònom Fídies, autor d'una estimació entre els diàmetres del Sol i de la Lluna. També se sap que durant la seva vida va establir una gran amistat —o parentesc familiar— amb el rei Hieró II de Siracusa (c. 306 aC-216 aC) i el seu fill Geló. Diodor de Sicília afegeix que va viatjar per Egipte, de manera que es pot deduir que va estudiar amb els deixebles d'Euclides a Alexandria. Probablement va ser aquí on va conèixer Conó de Samos (c. 280 aC-c. 220 aC), de qui es va fer amic íntim, Dositeu de Colonos i Eratòstenes de Cirene. De Conó se sap que era un dels astrònoms reials de Ptolemeu III (m. 222 aC) i que Claudi Ptolemeu li atribueix diverses observacions astronòmiques i Apol·loni de Perge un tractat sobre còniques. Pappos d'Alexandria assegura que el cargol atribuït a Arquimedes era d'ell. Per la seva banda, Dositeu també és citat per Ptolemeu i sembla que va ser autor d'alguna millora en l'obra d'Èudox de Cnidos. L'amistat entre Arquimedes i Conó va ser el marc perfecte per a la relació epistolar d'aquests dos personatges, i va ser precisament la mort de Conó la que va propiciar que Arquimedes es posés en contacte amb Dositeu, ja que «havia conegut a Conó i estava familiaritzat amb la geometria».

Malgrat que aquí només s'atendrà el seu vessant matemàtic, sembla que la seva fama com a enginyer militar va ser el que va donar-li tant de renom i d'aquí prové l'admiració que sentia per ell Marcel. En el llibre VIII.6 de la seva *Història universal*, Polibi parla d'unes màquines que eren capaces d'enfonsar els vaixells que s'acostaven als murs de la ciutat i que aixecaven les navegacions i les deixaven penjant fins a tornar-les a la mar de manera estrepitosa. Ja al segle XII, el gramàtic grec Joan Tzetzes escriu en el llibre II de les *Khiliades* que Arquimedes va construir «una mena de miralls hexagonals» que, sumats a una sèrie de miralls més petits, eren capaços de projectar els raigs solars en un punt de les veles dels vaixells romans, les quals s'incendiaven abans d'arribar a port. En la mateixa línia, l'historiador bizantí del segle XII Joan Zonares, en els seus

Annals de la Història, es refereix al mateix enginy dels miralls. Possiblement la font de tots dos va ser Antemi de Tralles, qui ja va fer-ne alguna referència entre el final del segle V i el començament del s. VI, aproximadament.

Un altre dels camps en què Arquimedes va destacar va ser l'astronomia. El mateix Ciceró, ocupant el càrrec de qüestor a Sicília (75 aC), menciona dues esferes construïdes per Arquimedes que Marcel va enviar a Roma. En una d'aquestes esferes hi havia gravades les constel·lacions del cel i Marcel la va fer col·locar al temple de la Virtut, mentre que l'altra consistia en una mena d'esfera armil·lar que el general va decidir quedar-se per al seu propi gaudiment. Quant als escrits, Pappos li assigna una obra perduda titulada *Sobre la construcció d'esferes*.

Finalment, cal tenir present que el seu nom ja era llegenda en temps dels romans i, un altre cop, Ciceró explica al llibre V.64-66 de les *Disputes tusculanes* que, gairebé un segle i mig després de la seva mort, els siracusans havien oblidat on estava enterrat Arquimedes, però ell va ser capaç de trobar la seva tomba, en la qual hi havia gravats una esfera i un cilindre. Ciceró va fer netejar la tomba i va fer obrir un camí cap a ella:

[...] de manera que, en una de les més famoses ciutats del món grec i també un gran centre de coneixement en temps antics, no es repetís la total ignorància de la tomba del seu ciutadà més brillant.

Aquest epitafi tan geomètric també el recull Plutarc, el qual diu que:

Malgrat que va fer descobriments brillants, [Arquimedes] va demanar als seus familiars i amics que gravessin sobre la tomba en la qual l'enterrarien un cilindre que tanqués una esfera amb una inscripció on constés la proporció en la qual el sòlid continent excedeix el contingut.



Retrat imaginari d'Arquimedes pintat per Domenico Fetti (1620).
Gemäldegalerie Alter Meister (Dresden)

LES SEVES OBRES

S'han conservat moltes obres d'Arquimedes, la majoria de gran importància. A continuació hi ha una relació d'algunes de les més conegudes:

1. *El mètode sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. El *Mètode* ha arribat als nostres dies d'una manera molt especial: el dimarts 19 de juliol de 1907, el *New York Times* anunciava que el filòleg John Ludwig Heiberg (1854-1928), de Copenhaguen, havia descobert un nou manuscrit d'Arquimedes a Constantinoble. En 1899, Athanasios Papadopoulos-Kerameus havia compilat un catàleg de manuscrits que havien estat propietat del patriarca grec de Jerusalem. Papadopoulos-Kerameus havia catalogat l'exemplar en qüestió com el número 355 i també havia transcrit una secció del text que havia estat esborrada i escrita al damunt. Heiberg va reconèixer aquesta transcripció com una obra d'Arquimedes i, després de diversos tràmits diplomàtics, va veure que estava davant d'una de les obres més importants del siracusà, a banda de l'aparició també per primera vegada de l'*Stomachion* i de l'obra *Dels cossos flotants*. Excepte les últimes vuit pàgines (de la 178 a la 185), que són del segle XVI, el manuscrit conté les obres d'Arquimedes copiades durant el segle X i, a més a més de les tres ja citades, també conté el *De l'esfera i el cilindre*, gairebé la totalitat de *De les línies espirals* i algunes parts de *La mesura del cercle* i *De l'equilibri dels plans*.

Abans d'aquesta descoberta, del *Mètode* només se'n tenien notícies a través d'una al·lusió dins la gran enciclopèdia bizantina *Suidas* (s. X), on es diu que Teodosi de Trípoli (s. II dC) va fer-ne un comentari. D'altra banda, a la *Mètrica* d'Heró d'Alexandria també es recullen tres proposicions seves. Així mateix, un cop trobada es va comprovar que el mateix Arquimedes va deixar-ne una referència explícita a la seva *La quadratura de la paràbola*, però havia passat desapercebuda perquè no estava citada la paraula *methodos*. La versió que es conserva està basada en un manuscrit que Lleó, restaurador de la Universitat de Constantinoble, va compilar al segle IX. Tres segles més tard, l'obra va arribar a la cort normanda de Palerm i d'allà va passar a la dinastia imperial germànica dels Hohenstaufen. Després de la batalla de Benevent en 1266, el llibre va ser regalat per Carles d'Anjou (1226-1285) al Papa i va ser conservat a la biblioteca papal de Viterbo entre el 1269 i el 1311. La pista continua per mans privades fins que entre el 1544 i el 1564 el manuscrit desapareix i no torna a sorgir fins el 1906.

Arquimedes havia enviat a Eratòstenes els enunciats de dos teoremes relatius a certs càlculs de volums cilíndrics per tal que l'alexandrí trobés la solució. Amb el *Mètode*, li envia les demostracions i li ensenya un mètode nou que permetia «disposar de recursos per poder estudiar alguns assumptes matemàtics mitjançant la mecànica». Arquimedes posa en un paper com ha arribat a trobar certs teoremes d'àrees i volums, insistint en la diferència que hi ha entre les idees i suposicions que suggereixen, els teoremes certs i les seves rigoroses demostracions. Així, el mètode ha de servir per donar les pistes dels resultats que s'han de trobar i indica que després s'ha de dotar la demostració d'una base geomètrica que la faci vertadera. Arquimedes promet afegir dos teoremes que enuncia al començament i que són necessaris com a prova formal; però només s'ha conservat parcialment el segon, amb la qual cosa s'ha pogut comprovar que el mètode era bàsicament el mètode d'exhaustió.



Titular de la notícia del 19 de juliol de 1907 al *New York Times*

2. *La quadratura de la paràbola*. És el primer tractat que Arquimedes envia a Dositeu, ja que cita la mort de Conó, fet que permet datar-lo posteriorment al 246 aC. En aquest text Arquimedes clama per l'originalitat de la seva resolució al problema de trobar la quadratura del segment parabòlic, la qual declara haver descobert mitjançant la mecànica i haver-la confirmat després amb la geometria.
3. *Dels cossos flotants*. Com ja s'ha comentat, la versió grega només ha arribat a través del mateix palimpsest on es trobava el *Mètode*. També s'ha conservat una versió en llatí que Willem van Moerbeke, conegut com Guillem de Moerbeke (c. 1215-1286), va fer a Viterbo el 1269.
4. *Stomachion*. Com en els dos casos anteriors, només hi ha la versió continguda al palimpsest, malgrat que n'hi ha una còpia parcial en àrab. És una obra en la qual es tracta una mena de trencaclosques semblant al tangram. El joc consisteix en 14 peces que formen un quadrat i l'objectiu final és trobar diferents formes animals, vegetals... Arquimedes es dedica a demostrar quina és la fracció de l'àrea total que mesura cada peça, així com certs problemes de mesura d'angles i combinacions possibles per saber de quantes maneres diferents es poden ajuntar peces per formar línies rectes. En paraules d'Arquimedes:

Com que l'anomenat *Stomachion* té una complexa teoria de la transposició de les figures de les quals es compon, vaig considerar necessari, en primer lloc, establir en la meua investigació de la magnitud de la figura completa cadascuna de les formes en les quals està dividida, perquè [el nombre] es mesura. A més a més, quins són els angles, considerats en combinacions i sumats, [...] amb la finalitat de trobar si, de la combinació de les figures que van sorgint, els costats resultants estan en una línia o si no arriben a estar-ho per poc, encara que no sigui perceptible per la vista. Aquest tipus de consideracions són intel·lectualment desafiants i, per si no estiguessin en línia per poc però sense que es noti a simple vista, les figures compostes no haurien de ser ignorades per aquesta raó.

L'*Stomachion* ocupa les últimes pàgines del manuscrit (de la 172 a la 177) i la seva última part havia estat substituïda per les ja citades pàgines del segle XVI. Així, doncs, no es conserva l'obra sencera, però sí un resum del joc en àrab del segle XVII.

5. *De l'esfera i el cilindre*. Aquest tractat ja es troba citat a la dedicatòria de l'obra *De les línies espirals* i, per tant, és anterior. Dels dos llibres d'aquesta obra, els resultats més importants del primer els dona Arquimedes directament en el prefaci de la carta a Dositeu, on diu que són nous i que és la primera vegada que es publiquen. Els resultats són, entre d'altres, que la superfície de l'esfera és quatre vegades l'àrea del cercle màxim, que la superfície de qualsevol segment d'una esfera és igual a l'àrea d'un cercle el radi del qual és igual al segment traçat des del vèrtex del segment fins a un punt de la circumferència de la base, que el volum del cilindre circumscribit a l'esfera és $\frac{3}{2}$ vegades el volum de l'esfera i que la superfície del cilindre circumscribit a l'esfera juntament amb les seves bases és igual a $\frac{3}{2}$ vegades la superfície de l'esfera.
6. *Sobre conoides i esferoides*, també citat al *De les línies espirals*. Aquesta obra tracta diverses propietats sobre paraboloides i hiperboloides de revolució i esferoides generats per la rotació d'una el·lipse al voltant d'un dels seus eixos.
7. *La mesura del cercle*. Aquest text consisteix en tres proposicions. La primera constata que l'àrea d'un cercle és igual a la d'un triangle rectangle de base igual a la circumferència del cercle i d'altura igual al radi. La segona certifica que la raó entre l'àrea del cercle i el quadrat del seu diàmetre és igual a $\frac{11}{14}$. Finalment, la tercera afirma que la raó entre la circumferència d'un cercle i el seu diàmetre és més gran que $3\frac{10}{71}$ i menor que $3\frac{1}{7}$.

8. *De les línies espirals*. En aquest escrit es defineix la teoria coneguda com *espiral d'Arquimedes* i en demostra tota una sèrie de proposicions.
9. *L'Arenari*. En aquesta obra Arquimedes demostra que el nombre de grans de sorra que caben dins de l'univers és finit i es pot comptar. A banda del sistema de numeració ideat per expressar els grans nombres, es recull un testimoni de l'existència d'un sistema heliocèntric ideat per Aristarc de Samos (s. III aC).
10. *De l'equilibri dels plans*. En aquest tractat es desenvolupen els teoremes geomètrics fonamentals de la mecànica.
11. *Problema dels bous*. En aquesta obra Arquimedes planteja que el problema d'anàlisi indeterminat consisteix a trobar el nombre de bous i vaques de quatre colors (és a dir, 8 quantitats) a partir d'unes condicions donades.

Mitjançant versions àrabs també es conserven les obres següents:

12. *Llibre dels lemes*
13. *Sobre l'heptàgon inscrit en el cercle*
14. *Sobre els cercles tangents*

Les versions àrabs li atribueixen:

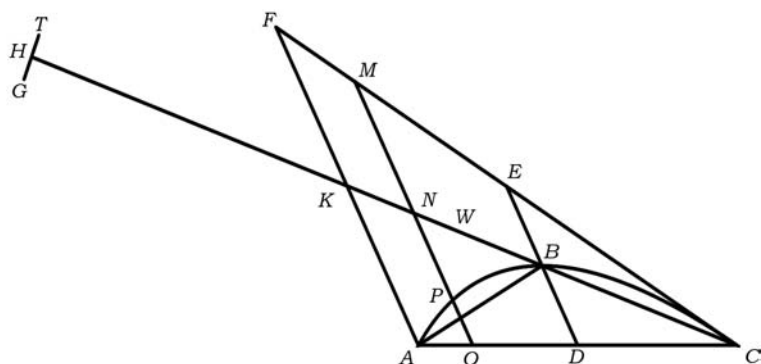
15. *Sobre les línies paral·leles*
16. *Sobre els triangles*
17. *Sobre les propietats dels triangles rectangles*
18. *Sobre clepsidres*
19. *Dades*

També hi ha referències a obres perdudes, entre d'altres:

20. Pappos li atribueix un treball sobre els políedres arquimedianos.
21. *De la denominació dels nombres*, dedicat a Zeuxip i citat per Arquimedes a l'*Arenari*. En aquesta obra sembla que s'hi explicaria el sistema numèric que va usar per expressar els nombres de l'ordre de $10^{80 \cdot 10^{15}}$ xifres a l'*Arenari*.
22. Una *Catòptrica*, en què s'explica la variació de la mida dels objectes introduïts dins de l'aigua.
23. Algunes obres mecàniques més: *Sobre els centres de gravetat*, *Sobre els equilibris*, *Mecànica*, *Sobre les balances* i *Sobre les palanques*.

EL MÈTODE

Tal com s'ha explicat en l'epígraf anterior, en el *Mètode*, Arquimedes revela a Eratòstenes el seu mètode per calcular certes propietats, el qual es basa en proposicions que es troben en altres obres seves. El primer gran resultat el trobem en la proposició 1 i consisteix en l'obtenció de l'àrea d'un segment parabòlic. Si es pren com a exemple el dibuix, s'observa un segment parabòlic ABC de diàmetre BD on la tangent CF està a C . P seria un punt qualsevol del segment i AKF i $OPNM$, segments paral·lels a BD . Es prolonga CB i $KH = KC$.



A la proposició 4 de *La quadratura de la paràbola*, Arquimedes comenta la igualtat:

$$\frac{MO}{OP} = \frac{CA}{AO} = \frac{CK}{KN} = \frac{HK}{KN}$$

Com que ABC és un segment parabòlic, $EB = BD$ i, per tant, $MN = NO$ i $FK = KA$. Si es considerés que HC fos el braç d'una palanca, s'hi podria penjar un segment $TG = PO$, el punt mitjà del qual coincidís amb H , i aquest segment estaria en equilibri amb el segment MO penjat sobre el seu punt mitjà N , ja que es compleix la llei de la palanca (amb punt de suport a K):

$$\frac{MO}{OP} = \frac{HK}{KN} \Rightarrow MO \cdot KN = HK \cdot OP = HK \cdot TG$$

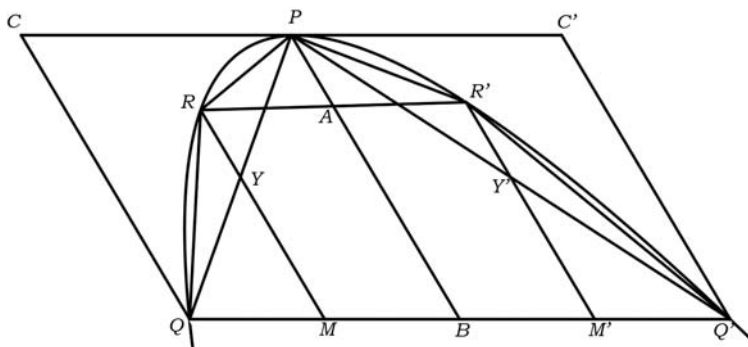
De la mateixa manera, tots els segments respectius MO i PO del triangle CFA i el segment CBA compliran la mateixa llei: ja que hi ha el mateix nombre de segments de cada tipus, tot el segment parabòlic penjat sobre H estarà en

equilibri amb el triangle CFA penjat en la seva posició actual. Cal observar que Arquimedes considera que el segment i el triangle estan formats per un munt de segments paral·lels indefinidament propers els uns als altres.

Com que el centre de gravetat del triangle CFA es troba a W , i $CW = 2WK$, i s'ha de tenir present que tot el triangle està penjat en aquest punt W , aleshores:

$$\frac{\text{segment } ABC}{\text{triangle } CFA} = \frac{WK}{KH} = \frac{1}{3} \Rightarrow \text{segment } ABC = \frac{1}{3} \text{triangle } CFA = \frac{4}{3} \text{triangle } ABC$$

Per tant, mitjançant el seu *Mètode*, Arquimedes va arribar a trobar «mecànicament» aquesta raó de $\frac{4}{3}$ que reafirmà a *La quadratura de la paràbola* i que comprovà mitjançant el *mètode d'exhaustió*. Així, doncs, atenent a la representació de sota, QPQ' és el triangle inscrit a la paràbola, on P és el punt de tangència amb CC' , la paral·lela a la base del segment QQ' . B és el punt mitjà de QQ' i es tracen el segment BP i els segments paral·lels CQ i $C'Q'$ pels punts Q i Q' , de manera que el segment parabòlic queda inscrit al paral·lelogram $QQ'C'C$, el qual està dividit en dos paral·lelograms iguals pel segment BP .



Queda clar que, en aquestes condicions, el triangle $QQ'P$ ocupa més de la meitat de l'àrea del segment parabòlic, ja que l'àrea d'aquest triangle és la meitat de la del paral·lelogram i el segment queda situat entre ambdues figures. A continuació, Arquimedes troba M i M' , punts mitjans dels segments QB i BQ' , respectivament, i aixeca les línies MR i $M'R'$ paral·leles a BP , de manera que n'obté dos nous triangles, QPR i $Q'PR'$, que també ocupen més de la meitat de l'àrea de segment parabòlic que queda per cobrir —ja que Y i Y' divideixen en dos segments iguals a PQ i PQ' , respectivament. En aquesta situació, és evident que:

$$QB^2 = (2MB)^2 = 4MB^2 = 4RA^2$$

i que

$$BP = 4AP, MR = 3AP \quad \text{i} \quad MY = 2AP = 2YR$$

Per tant, es pot afirmar que el triangle PQB és el doble de PQM ; com que $MY = 2YR$, el triangle PRQ és la meitat de PQM i la quarta part de PQB . De la mateixa manera, el triangle $PQ'R'$ és la quarta part de PBQ i, per tant, el triangle PQQ' és:

$$PQQ' = 4(PRQ + PQ'R')$$

Anàlogament, es demostra que la següent addició de triangles inscrits són la quarta part de la suma de $PRQ + PQ'R'$ i així successivament, amb la qual cosa Arquimedes arriba a la conclusió que l'àrea del segment parabòlic ha de ser:

$$\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right] PQQ'$$

A més a més, cada addició és més gran que la meitat de l'àrea de segment que queda després de treure-li els triangles anteriors, motiu pel qual els triangles «exhaureixen» l'àrea buscada. Per tant, si se suma la sèrie geomètrica resultant per veure quin és el resultat que s'ha d'obtenir, es té:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n &= \frac{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \end{aligned}$$

D'aquesta manera, s'observa que, si s'itera e, s'obté que l'àrea del segment parabòlic és:

$$\text{Segment } PQQ' = \frac{4}{3} \text{ triangle } PQQ'$$

Arquimedes va extreure perfectament aquest resultat i el següent pas en la seva demostració va ser provar la igualtat amb una doble reducció a l'absurd, considerant que $A = \text{triangle } PQQ'$.

1. Siguin Σ l'àrea del segment parabòlic, $K = \frac{4}{3}A$ i la successió $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n A$.

Si se suposa que $\Sigma > rK$ i que $\varepsilon = \Sigma - K$, aleshores s'hi inscriu una figura Δ com abans, de manera que $\Sigma - \Delta < \Sigma - K$. Per tant, $\Sigma > \Delta > K$. Com que el procediment és el mateix, ha d'existir k tal que:

$$\Delta = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k$$

Fent les corresponents sumes de les sèries, es comprova fàcilment que:

$$K = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \frac{1}{3}A_k$$

Per tant:

$$K - \Delta = K - (A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = \frac{1}{3}A_k > 0 \Rightarrow K > \Delta$$

Aquest resultat és impossible ja que s'ha de suposar que $\Delta > K$.

2. Sigui ara $\Sigma < K$ i sigui un altre cop la successió $A_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n A$ de triangles inscrits. En aquestes condicions, s'arribarà a un terme k en el qual $A_k < K - \Sigma$ i es tornarà a la mateixa situació que abans:

$$K = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k + \frac{1}{3}A_k$$

Per tant:

$$\begin{aligned} K - (A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k) &= \\ &= \frac{1}{3}A_k < A_k < K - \Sigma \Rightarrow \Sigma < A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_k \end{aligned}$$

Aquest resultat també és impossible ja que qualsevol suma finita de triangles inscrits sempre està dins del segment i, en conseqüència, és menor que aquest.

Arquimedes pot concloure, així, que $\Sigma = K$ i, per tant, queda calculada l'àrea del segment parabòlic.

