

Relativitat especial amb aplicacions a l'electrodinàmica clàssica

J. Llosa
A. Molina

Publicacions i Edicions

Relativitat especial amb aplicacions a l'electrodinàmica clàssica

Relativitat especial amb aplicacions a l'electrodinàmica clàssica

J. Llosa
A. Molina

Publicacions i Edicions



UNIVERSITAT DE BARCELONA



Índex

Prefaci	13
1 Física prerelativista	15
1.1 Sistemes de referència i mesura del temps	15
1.1.1 L'espai	16
1.1.2 El temps	18
1.1.3 Sistemes de referència	20
1.2 Principi de relativitat de Galileu	20
1.2.1 Les transformacions de Galileu	21
1.2.2 Invariància galileiana de la mecànica de Newton	23
1.2.3 Transformacions de Galileu i electromagnetisme	24
1.3 Electrodinàmica dels cossos en moviment	26
1.3.1 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v/c	26
1.3.2 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v^2/c^2	27
1.4 Òptica. La velocitat de la llum	28
1.4.1 La velocitat de la llum en el buit	28
1.4.2 Òptica. Efectes d'ordre v/c	31
1.4.3 Òptica d'ordre v^2/c^2 . L'experiment de Michelson	35
2 Els postulats de la teoria especial de la relativitat	41
2.1 El principi de relativitat de Poincaré i Einstein	41
2.2 Revisió de la cinemàtica	42
2.2.1 La simultaneïtat podria no ser universal	44
2.3 La transformació de Lorentz	45
2.4 Propietats de les transformacions de Lorentz	50
2.4.1 Expressió vectorial de les transformacions de Lorentz	53
2.5 Mesures de longitud i de duracions per a sistemes mòbils	54
2.5.1 Mesures de longituds	55
2.5.2 Mesures del temps	57
2.6 Llei de composició de les velocitats	61
2.6.1 Velocitats paral·leles	62
Apèndix 2.A	63

3	Òptica relativista	69
3.1	Fenòmens ondulatoris	69
3.1.1	Fronts d'ona	69
3.1.2	Ones planes monocromàtiques	70
3.2	Transformació dels fronts d'ona	72
3.2.1	Efecte Doppler	73
3.2.2	L'aberració estel·lar	74
3.2.3	Fórmula de Fresnel	75
3.3	Mesures de l'efecte Doppler relativista	76
3.3.1	L'experiment d'Ives-Stilwell	76
3.3.2	Altres experiments	78
3.3.3	L'efecte Doppler i els espectres d'emissió i absorció	79
3.3.4	Mesures basades en l'efecte Mösbauer	84
3.3.5	L'espectre de SS 433	87
4	L'espai i temps de Minkowski	93
4.1	Introducció	93
4.2	L'espai i temps de Minkowski	94
4.2.1	La mètrica de Minkowski	94
4.3	Classificació dels intervals	96
4.4	Els cons de llum	98
4.5	Línia d'univers d'un punt material	101
4.5.1	Parametrització, orientació i causalitat	101
4.5.2	El temps propi	103
4.6	La paradoxa dels bessons. Realitzacions experimentals	104
4.6.1	Desintegració de muons en vol	105
4.6.2	L'experiment de Hafele i Keating	106
4.7	Velocitat i acceleració pròpies	109
4.8	Moviment uniformement accelerat	111
4.8.1	Moviment hiperbòlic	112
5	Mecànica relativista	115
5.1	El quadrimoment lineal	115
5.1.1	Col·lisions newtonianes	115
5.1.2	Col·lisions relativistes	117
5.1.3	Quadrimoment lineal	118
5.1.4	Propietats del quadrimoment lineal	119
5.1.5	Xocs elàstics i xocs inelàstics	120
5.1.6	Fotons	123
5.2	Conversió massa-energia	124
5.2.1	La inèrcia de l'energia	124
5.2.2	Fissió i fusió nuclears	126
5.3	El sistema del centre de massa	127
5.3.1	Hi ha un punt centre de massa relativista?	129

5.4	Dinàmica relativista	131
5.4.1	La inèrcia augmenta amb la velocitat	132
5.5	Quadrimoment angular	133
5.6	El moment angular intern. Spin	135
5.6.1	El transport de Fermi-Walker	137
5.6.2	La precessió de Thomas	138
5.7	Quadrimoment angular total d'una partícula amb spin \uparrow	140
5.8	Formalismes lagrangiana i hamiltoniana	141
5.8.1	Lagrangiana d'una partícula lliure	141
5.8.2	Invariància per reparametrització	142
5.8.3	Formalisme hamiltoniana	143
6	Dinàmica relativista: partícules en interacció\uparrow	147
6.1	Introducció	147
6.2	Transformacions canòniques	148
6.2.1	Transformacions canòniques infinitesimals	149
6.2.2	L'operador generador infinitesimal	151
6.3	Transformacions de Poincaré infinitesimals	151
6.4	Partícula lliure i invariància de Poincaré	152
6.4.1	Les funcions generatrius	153
6.4.2	L'àlgebra de Poisson del grup de Poincaré	154
6.4.3	Els generadors infinitesimals de Poincaré	155
6.5	Sistema de diverses partícules	156
6.5.1	Partícules sense interacció	158
6.5.2	Partícules en interacció	159
6.6	Sistemes predictius invariants pel grup de Poincaré	161
7	Dinàmica relativista de medis continus\uparrow	165
7.1	Lleis de conservació macroscòpiques	165
7.2	Conservació del quadrimoment lineal	167
7.2.1	El tensor d'energia-moment	168
7.2.2	Llei de conservació local	170
7.2.3	Conservació del quadrimoment lineal total	171
7.2.4	Lleis de transformació	172
7.3	El moment angular	173
7.3.1	Moment angular orbital i spin	174
7.4	El tensor d'energia-moment de Belinfante	175
7.5	Dinàmica newtoniana de medis continus	177
7.5.1	Equacions del moviment. Tensor d'esforços	177
7.5.2	Equacions constitutives del medi	178
7.6	Equacions constitutives. Cas relativista	179
7.6.1	L'equació d'estat	180

8	Equacions de l'electrodinàmica clàssica	185
8.1	Equacions de Maxwell	185
8.2	Càrregues i corrents	187
8.2.1	Forma covariant de l'equació de continuïtat	187
8.2.2	La càrrega total és un escalar	188
8.3	El tensor de Faraday	190
8.3.1	Transformació dels camps elèctric i magnètic	191
8.3.2	Els invariants del camp electromagnètic	192
8.3.3	Forma covariant de les equacions de Maxwell en el buit	196
8.4	Potencials electromagnètics	197
8.4.1	El quadripotencial electromagnètic	197
8.4.2	Les transformacions de galga	198
8.4.3	Les equacions del potencial electromagnètic	199
8.5	Tensor d'energia-moment i lleis de conservació	199
8.5.1	Conservació de l'energia. Teorema de Poynting	200
8.5.2	Conservació del quadrimoment lineal. Tensor d'energia-moment	201
Apèndix 8.A		204
9	Càrregues en un camp electromagnètic	211
9.1	Moviment d'una càrrega en un camp uniforme i constant	211
9.1.1	Moviment d'una càrrega en un camp elèctric	212
9.1.2	Moviment en un camp magnètic	213
9.1.3	Moviment en un camp electromagnètic singular	214
9.1.4	Moviment en un camp electromagnètic genèric	215
9.1.5	Acceleradors de càrregues	216
9.2	Moviment en un camp magnètic no uniforme	219
9.3	Formulació lagrangiana i hamiltoniana	221
9.3.1	Lagrangiana d'una càrrega puntual	222
9.3.2	Formalisme hamiltonià	223
9.3.3	Moviment en un camp elèctric central	224
9.4	Partícula amb moment magnètic	226
10	Solució de les equacions de Maxwell	233
10.1	Problema de valors inicials. Funció de Green	233
10.1.1	Solucions de l'equació d'ona	234
10.1.2	La condició de galga	238
10.1.3	Propagadors	239
10.2	El potencial retardat	239
10.3	Camps d'una font sinusoïdal localitzada	240
10.3.1	Camps de radiació lluny de la font	243
10.4	Aproximacions multipolars	244
10.4.1	Radiació dipolar elèctrica	244
10.4.2	Radiació dipolar magnètica	246

10.4.3	Radiació quadrupolar elèctrica	248
11	Radiació per càrregues en moviment	251
11.1	El camp electromagnètic d'una càrrega puntual	251
11.1.1	Els potencials retardats de Liénard-Wiechert	251
11.1.2	Camp electromagnètic retardat	254
11.2	Potència radiada per una càrrega	257
11.2.1	Moment lineal radiat per unitat de temps	258
11.3	Pèrdues radiatives	259
11.4	Distribució angular de la radiació	260
11.4.1	Càrrega en moviment rectilini	262
11.4.2	Moviment circular uniforme	264
11.5	Radiació de sincrotró	265
11.6	La frenada per radiació	269
11.6.1	L'equació d'Abraham-Lorentz-Dirac	270
12	Ones electromagnètiques en el buit	279
12.1	Les ones electromagnètiques en el buit	279
12.1.1	Polarització	282
12.1.2	El tensor d'energia-moment	283
13	Ones electromagnètiques en medis materials	287
13.1	Camps electromagnètics en medis materials	287
13.2	Ones electromagnètiques en un medi dispersiu	289
13.2.1	Ones planes	289
13.2.2	L'índex de refracció	291
13.3	Les velocitats d'una ona	292
13.4	Propagació supralumínica en un medi transparent	297
	Apèndix 13.A	303
	Apèndix 13.B	308
A	Tensors i mètriques	311
A.1	Vectors, escalars i tensors	311
A.1.1	Escalars	311
A.1.2	Vectors i covectors	313
A.1.3	Objectes invariants	315
A.1.4	Tensors	316
A.1.5	Operacions amb tensors	318
A.1.6	Criteris de tensorialitat	319
A.2	Mètriques	320
A.2.1	Mètriques no degenerades	320
A.2.2	La mètrica inversa	321
A.2.3	L'operació de pujar i baixar índexs	322

B	Hipersuperfícies	323
B.1	Element d'hipersuperfície	323
B.2	El teorema de Gauss-Ostrogradski	326
C	Transformada de Fourier i funcions generalitzades	329
C.1	Transformada de Fourier	329
C.2	Funcions generalitzades	332
C.3	Càlcul d'algunes integrals	333
	Bibliografia complementària	335
	Solucions dels problemes	337
	Índex terminològic	345

Prefaci

Aquest llibre estén i completa els apunts que havíem preparat per a les classes d'Electrodinàmica Clàssica i que hem utilitzat al llarg d'uns quants cursos. Pretén sobretot ser una eina docent per a aquesta assignatura de la llicenciatura de Física a la UB, i aquest objectiu es veu reflectit en el contingut del text. Una bona part de l'assignatura consisteix en uns fonaments de relativitat especial, que després s'apliquen a l'estudi de l'electrodinàmica clàssica pròpiament dita.

Dels textos publicats sobre aquests temes no en vàrem trobar cap que ens satisfés prou per seguir-lo com a llibre de text i recomanar-lo als nostres estudiants; sigui perquè el nivell era massa elemental o massa avançat per als nostres propòsits, perquè el formalisme matemàtic era massa antiquat o perquè era massa elaborat, etc. I així vàrem embolicar-nos en aquesta aventura.

La teoria de la relativitat constitueix, sens dubte, una de les teories que van revolucionar la física del segle XX i de ben segur que interessa un públic més ampli, que també hem tingut present en la redacció del text. Tanmateix, aquest no és un llibre elemental sobre la teoria especial de la relativitat. D'aquests ja n'hi ha, i força, tant d'un nivell divulgatiu com d'una dificultat primària.

Hem suposat que el lector té ja adquirits els coneixements bàsics de matemàtiques i física d'un estudiant que comença el segon cicle d'una llicenciatura de ciències o d'una enginyeria.

Per bé que no n'hem fet una separació explícita, en el sumari s'hi distingeixen dues parts: els nou primers capítols es dediquen a la teoria especial de la relativitat i la resta, a l'estudi d'alguns temes escollits d'electrodinàmica clàssica, amb un enfocament relativista.

Alguns apartats, i també alguns capítols sencers, són d'un nivell més avançat que el que correspondria a un text com ara aquest. Els uns i els altres estan indicats amb un † i el lector en pot prescindir si vol, sense que això afecti la lectura ni la comprensió de la resta. Ens hem decidit a afegir-los perquè són interessants per a aquell lector que vulgui aprofundir en la teoria de la relativitat i perquè enllacen amb el contingut del llibre sense cap discontinuïtat. (Per exemple, el capítol 7 serà essencial per a qui vulgui estudiar més endavant la teoria general de la relativitat.)

Hem volgut fugir d'una exposició massa formal amb un llenguatge matemàtic massa complicat, això hauria reduït els nostres lectors als físics teòrics, i hem procurat allà on ha estat possible basar-nos sobretot en raonaments i discussions,

i il·lustrar l'exposició amb exemples i la descripció d'experiments. Així, en aquells passatges que implicaven una deducció matemàtica massa detallada, que restaria fluïdesa a l'exposició principal, hem optat per desplaçar els detalls matemàtics a un apèndix de final de capítol.

A fi de motivar la necessitat del canvi conceptual que representa la transició de la física newtoniana a la relativista, en els capítols inicials hem fet un breu repàs de la física a finals del segle XIX. Tanmateix, no ens hem mantingut fidels al que seria una presentació històrica dels conceptes, ni ho preteníem. Un exemple clar d'aquest fet és l'enfocament que hem donat a la introducció de la força de Lorentz relativista al capítol 8.

Tot i que el to general del llibre és força deductiu, hem volgut anar més enllà d'exposar els principis de la teoria i desenvolupar-ne el formalisme, com es podria esperar de dos físics teòrics. Com que es tracta d'un llibre de física, sempre que ens ha estat avinent hem procurat parar atenció a experiments i observacions que requereixen de la relativitat especial per ser entesos. Alguns els hem comentat i explicat amb un cert detall. I aquesta tasca no ha resultat gens fàcil. D'entrada, per les diferències entre el llenguatge dels experimentals i el dels teòrics, però també perquè cada experiment integra coneixements de moltes branques de la física alhora i presentar-los junts, d'una manera comprensible i en un format reduït, no és senzill. Com a exemple, l'explicació i la interpretació de les mesures recents de propagació supralumínica de llum en un medi ens ha obligat a escriure un capítol sencer, el 13, com a preparació.

Per a teòrics com nosaltres descriure experiments és arriscat, en particular perquè és fàcil que se'ns escapi alguna impertinència. Més si es té en compte la varietat dels temes inclosos: astronomia, física nuclear, òptica, etc. És un risc que hem cregut que valia la pena córrer. Per tal d'evitar les imprecisions en allò que fos possible hem procurat l'assessorament de col·legues especialistes en cada tema. Volem agrair a en Robert Estalella, en Josep M. Paredes, en Francesc Salvat, en Gaspar Orriols i en Luis Navarro la paciència de llegir i corregir aquells passatges sobre els quals els hem demanat l'opinió.

Hem de donar les gràcies especialment a en Jaume Carot per haver-se prestat a fer una lectura general del manuscrit. Els seus comentaris, crítiques i suggeriments ens han permès fer el text més llegible i eliminar inconsistències. I finalment també a n'Anton Carrasco i n'Albert Compte pel seu esforç en el mecanografiat i la realització de les figures.

Josep Llosa
Alfred Molina
Universitat de Barcelona
Barcelona, juny de 2004

Capítol 1

Física prerelativista

1.1 Sistemes de referència i mesura del temps

Quan diem: «Quedem a la porta de la facultat demà a les 8 del matí», els companys de feina o els estudiants de la facultat entendran fàcilment la cita i podrem trobar-nos. Si ho hem de fer entendre a un físic japonès que mai no ha vingut a Barcelona haurem de precisar molt més, situar la facultat a Barcelona i fer-li saber la diferència horària entre Barcelona i el Japó. Encara en aquest cas resulta fàcil perquè ja hi ha una sèrie de convencions horàries comunes i estem a la Terra. Però imaginem ara que la cita és amb un extraterrestre que ens visita i ha de venir d'una altra galàxia ja tindriem dificultats per situar-li la Terra dins de la nostra Galàxia, comptant que poguéssim dir-li on és la Via Làctea, car hauríem de buscar un sistema de referència comú. Per dir-li l'hora hauríem de sincronitzar els rellotges i donar-li la durada de l'interval que anomenem segon.

Per poder descriure els fenòmens cal situar-los en l'espai i el temps. Estem acostumats a donar tres quantitats (coordenades) per determinar la posició i una per a l'instant de temps. La correspondència entre aquestes quantitats i la posició i el temps d'un esdeveniment implica una sèrie de protocols, operacions i convenis tàcits que intentarem analitzar al llarg d'aquesta secció. Aquests convenis inclouen l'elecció d'un espai de referència, les mesures en aquest espai (per exemple, per mitjà de fils «inextensibles»), la mesura de duracions per mitjà d'un sistema de rellotges, etc.

Un dels objectius de la física és descriure les lleis d'evolució de determinats fenòmens. En particular la mecànica s'ocupa de les lleis del moviment dels cossos. Quan afirmem que un cos es mou volem dir que canvia la seva posició, però només podem adonar-nos que una cosa canvia si la comparem amb una altra que, per definició, roman invariable. Per aquesta raó, és essencial per a l'estudi de la mecànica disposar d'un cos, o un sistema de cossos, que per convenció considerem invariable i prenem com a referència.

1.1.1 L'espai

El concepte d'espai que tenim i que acostumem a donar per sentat l'hem adquirit a partir de l'experiència quotidiana. Està vinculat a l'escorça terrestre, els edificis, les parets de l'habitació, la taula del laboratori, etc. És a dir cossos o sistemes de cossos amb una configuració relativa rígida, que no canvia. Un sistema de cossos amb aquesta propietat, així com la seva prolongació ideal, constitueix un *espai de referència*.

Per tal de comprendre millor la importància d'aquesta configuració rígida podem fixar-nos, per exemple, en el fet que els objectes que suren sobre l'aigua del mar no mantenen una posició relativa constant i no són, per tant, una bona referència, tampoc ho són els líquids o els gasos. D'aquí que, en l'antiguitat, els navegants haguessin de mantenir la costa a la vista per no perdre's. Posteriorment, amb uns millors coneixements d'astronomia, els estels fixos (anomenats així perquè mantenen la seva posició relativa mentre la volta del cel fa la seva rotació diària) els van proporcionar una referència parcial per a la navegació nocturna: d'una banda, els permetia determinar la latitud, però per conèixer amb fiabilitat la longitud calia a més un rellotge per mesurar la diferència horària entre el meridià del lloc i el meridià origen.¹

L'expressió *repòs relatiu* està íntimament relacionada amb el concepte de *sistema rígid*, ja que si un sistema de punts està en repòs relatiu, les relacions geomètriques entre les seves parts no canvien. En particular, la distància entre qualsevol parella de punts es manté constant. Aquesta és precisament la definició de *sistema rígid* o de *moviment rígid*.

Un *sòlid rígid* és un cos en què les forces de lligam entre les seves parts garanteixen que en qualsevol circumstància aquestes segueixen un moviment rígid. Tanmateix, un conjunt de punts pot seguir un moviment rígid sense que hi hagi cap lligam físic manifest entre ells. Pensem en una esquadra d'avions de vol acrobàtic en què els pilots es conxorxen per mantenir sempre la mateixa formació, amb distàncies constants entre els aparells.

Un sòlid rígid és un objecte ideal. A la natura no hi ha cossos rígids, si bé determinats cossos es poden considerar aproximadament rígids, segons el grau de precisió que volguem donar a la descripció. Així, per descriure el moviment d'un giroscopi d'acer, el considerarem rígid, mentre que en l'estudi de la propagació d'ones acústiques en una barra del mateix material haurem de considerar l'acer com un sòlid elàstic.

L'espai de referència construït així es regeix per les lleis de la geometria euclidiana. Aquesta és una propietat empírica que se sustenta sobre l'experiència continuada dels constructors, els navegants, els astrònoms, etc.²

¹No es va disposar d'un rellotge prou estable i precís fins a mitjan segle XVIII. Vegeu SOBEL, D., *La longitud. La veritable història d'un geni solitari [...]*, Edicions 62, (Barcelona, 1997).

²La validesa d'aquesta propietat no té res a veure amb la consistència dels postulats d'Euclides, ni amb la qüestió que va romandre oberta fins a començaments del segle XIX referent al postulat

L'any 1821 Gauss va intentar comprovar si l'espai físic responia als axiomes de la geometria euclidiana. L'experiment va consistir a mesurar els angles d'un triangle d'uns 100 km de costat per veure si sumaven 180° . No trobà cap desviació dins de l'error experimental, que era de l'ordre de 0,7 segons d'arc. La seva validesa s'ha d'entendre restringida a la precisió dels aparells de mesura de l'època i també al domini dels fenòmens considerats.

Per fer mesures en l'espai necessitem un patró de longitud que hem de poder considerar invariable. A més, com que hem d'aplicar-lo en qualsevol lloc i amb qualsevol orientació, no haurà de canviar si el sotmetem a moviments de translació i de rotació. La realització d'aquest patró de longitud ha de ser feta doncs d'un material tan rígid com sigui possible (igual que els cossos de referència).

En un espai de referència donat —que ja hem dit que per a la mecànica clàssica serà euclidià— podem assignar a cada punt tres nombres o *coordenades* que ens serviran per identificar-lo. Un sistema de coordenades és una manera d'etiquetar cada punt de l'espai amb una terna de nombres.

Donat l'espai de referència, hi ha molts sistemes de coordenades diferents (cartesianes rectangulars, obliqües, esfèriques, cilíndriques, etc.). El fet d'escollir-ne l'un o l'altre depèn de la conveniència en cada problema concret.

En general, són especialment útils els sistemes de *coordenades cartesianes* perquè estan molt relacionats —per la seva pròpia construcció— amb les propietats mètriques de l'espai euclidià de referència. Un sistema de coordenades cartesianes és definit per tres eixos ortogonals concurrents en un punt O que anomenem *origen de coordenades*. Les coordenades (x, y, z) d'un punt P són les longituds amb el signe corresponent dels segments que van de l'origen O a les projeccions ortogonals de P sobre els tres eixos, OP_x , OP_y i OP_z . (Notem com les nocions mètriques de distància i ortogonalitat intervenen en la determinació dels valors d'aquestes coordenades.)

Entre d'altres propietats, les coordenades cartesianes tenen la virtut que la distància entre dos punts ve donada pel teorema de Pitàgores: *el quadrat de la distància entre dos punts P i Q és igual a la suma dels quadrats de les diferències entre les coordenades*:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}. \quad (1.1)$$

Les coordenades cartesianes (x_1, x_2, x_3) i (x'_1, x'_2, x'_3) d'un mateix punt de l'espai segons dos sistemes de coordenades, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament, estan relacionades per una llei de transformació del tipus:

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 R_{ij}(x_j - A_j), \quad (1.2)$$

on R_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, és una matriu ortogonal, és a dir una matriu que té la propietat $RR^T = 1$, i dóna compte de la diferent orientació dels eixos coordenats

de les paral·leles.

de \mathcal{K} i \mathcal{K}' , mentre que A_j són tres nombres reals arbitraris que corresponen al fet d'haver escollit diferents orígens de coordenades en els dos sistemes. El conjunt d'aquestes lleis de transformació és el que s'anomena *grup euclidià*, i inclou totes les transformacions entre sistemes de coordenades per als quals val la llei pitagòrica (1.1), és a dir, que conserven la distància euclidiana.

1.1.2 El temps

El concepte de temps està lligat a la idea de canvi. La forma més primitiva és la de *temps psicològic* o *subjectiu* i correspon a l'ordenació que pot fer un individu de les seves experiències segons l'abans i el després.

Els conceptes de causa i efecte estan molt relacionats amb aquesta ordenació. Si un mateix individu observa que l'esdeveniment F es produeix sempre que s'ha produït E , que petites variacions en les condicions de E repercuteixen en petites variacions de les condicions de F , i que això mateix observa qualsevol altre individu, llavors s'infereix que E és la *causa* de l'*efecte* F . I aleshores es considera que temporalment E passa abans que F .

Les lleis físiques s'ocupen de descriure d'una manera quantitativa com es produeixen els canvis, a quin ritme, etc. Per això el paràmetre temps és inevitable en la física. Tanmateix es tracta d'un concepte una mica més elaborat que el que acabem de comentar. Cal poder mesurar *duracions* d'interval·ls de temps (d'una manera objectiva, independent de l'individu) i poder decidir, d'entre qualsevol parell d'esdeveniments, que potser s'han produït en llocs diferents, quin és anterior i quin és posterior. El primer requisit es resol amb l'ajut de rellotges patró i el segon per mitjà d'un *protocol de sincronització* o una definició de *simultaneïtat*.

La necessitat d'establir un protocol de sincronització no es planteja en el marc de la física newtoniana, en què el temps és absolut, el mateix per a tothom. Aquesta manera d'entendre les coses és, de fet, fruit d'una experiència continuada que no presentava cap conflicte en el domini d'experiments i observacions de què s'ocupava la física clàssica: si dos esdeveniments són vistos simultàniament per un individu també ho són per a qualsevol altre. L'efecte dels retards diferents que afectarien els diferents senyals lluminosos que informen cada observador del fet que s'ha produït cada un d'aquests dos esdeveniments és negligible per a les velocitats i distàncies de què s'ocupa la física newtoniana i a la precisió amb què s'hi treballa. Deixarem per a més endavant, en el capítol 2, quan sortirem del domini newtonià, la discussió de possibles protocols de sincronització.

Per a la mesura de duracions s'utilitzen els rellotges. Cada rellotge es basa en un sistema cíclic, ja sigui la rotació diària de la volta celeste, el moviment anual de la Terra, les oscil·lacions d'un pèndol, les vibracions d'un diapasó, d'un cristall de quars o d'una determinada transició atòmica. Els cicles d'aquest sistema es van repetint, sempre en les mateixes circumstàncies, de manera que no sembla agosarat prendre la *convenció* que dos cicles diferents duren el mateix. La consistència d'aquesta convenció es basa en la suposició raonable que *les mateixes*

causes produeixen els mateixos efectes. A més, amb les lleis de la mecànica es pot estudiar el moviment ideal d'alguns d'aquests rellotges, o bé les freqüències per a una transició atòmica, i veure si la teoria preveu que el període dels cicles és el mateix.

Diem que la marxa d'un rellotge és *uniforme* quan dos cicles qualssevol del rellotge duren el mateix. Una afirmació com aquesta només té un valor relatiu, és a dir, quan comparem la marxa de dos rellotges basats en sistemes diferents. Comparats entre ells mateixos, tots els períodes d'un mateix rellotge són iguals per convenció.

La rellevància d'aquest comentari ve del fet que si comparem entre ells els diversos rellotges esmentats més amunt, la seva marxa relativa no és uniforme. Això planteja el dilema de preferir l'un a l'altre. De fet, la causa de la discrepància rau en el fet que les circumstàncies que determinen la dinàmica d'un rellotge real són molt variades i no tenim cap manera de garantir que tots els cicles es produeixin en les mateixes condicions. Per exemple, el període d'un rellotge de pèndol depèn de l'amplitud de l'oscil·lació —molt poc, al segon ordre—, l'amortiment degut a la fricció de les diverses parts de la maquinària fa que l'amplitud disminueixi de manera que a la llarga els períodes de les oscil·lacions deixen de ser iguals. O també, si prenem com a sistema cíclic la rotació terrestre, aquesta s'alenteix a causa de la fricció associada al moviment de les marees. I si ens basem en el moviment de translació anual de la Terra al voltant del Sol, les condicions d'aquesta canvien d'un any a l'altre perquè canvia la posició dels planetes veïns que pertorben el moviment de la Terra.

Per corregir els efectes d'aquestes possibles variacions s'utilitza una teoria de la dinàmica del rellotge, la qual es basa en la mecànica de Newton, la relativitat especial o la general segons el sistema que es consideri i la precisió que es vulgui aconseguir.

Aparentment, doncs, el temps físic és un concepte previ a les lleis de la mecànica i de la física, ja que aquestes lleis són enunciats relatius a mesures d'espai, de temps i de forces. Tanmateix la realitat és més complexa, per corregir la marxa dels rellotges *reals* s'utilitzen teories de la seva dinàmica que es basen en les lleis de la física. Per exemple, en el sistema de mesura del temps basat en les efemèrides astronòmiques, s'introdueixen les correccions obtingudes per mitjà de l'anomenada *equació del temps*, que tenia compte de la irregularitat del moviment de la Terra d'acord amb la predicció de la mecànica de Newton. La conseqüència de tot plegat és que de fet, i com va remarcar Poincaré,³ el temps físic es defineix de manera que les lleis de Newton siguin vàlides.

³Vegeu POINCARÉ, H., *La valeur de la Science*, (Capítol II, *La mesure du temps*), Flammarion, (París, 1970).

1.1.3 Sistemes de referència

Un espai de referència junt amb un bon rellotge constitueixen a la mecànica de Newton el que s'anomena *sistema de referència* o també un *observador*.

Quan determinem les relacions entre diversos fenòmens en forma de llei matemàtica, l'expressió que se n'obté és molt diferent segons el sistema de referència triat. N'hi ha uns en què les lleis de la mecànica de Newton són més senzilles, els anomenem *sistemes de referència inercials* i són aquells per als quals valen les lleis de Newton de la mecànica. Newton els va caracteritzar pel fet de tenir un moviment rectilini i uniforme respecte a allò que ell anomenà *espai absolut*. Però com que aquest concepte és impossible de manejar físicament, a la pràctica es fa servir la primera llei de Newton per caracteritzar-los. Així, definim *sistema inercial* amb les dues propietats següents:

- (a) les relacions d'espai determinades amb regles rígids en repòs compleixen les lleis de la geometria euclidiana,
- (b) podem escollir un temps universal en termes del qual una massa puntual no sotmesa a cap acció identificable —de contacte, electromagnètica, gravitacional, etc.— roman en estat de repòs o de moviment rectilini i uniforme.

Els sistemes de referència que s'utilitzen a la pràctica només són aproximadament inercials, segons quin sigui el fenomen que es vulgui estudiar. Així, per a un experiment que duri poc temps (entorn d'una hora) un laboratori fix en la superfície terrestre és un sistema de referència aproximadament inercial. Si l'experiment dura mig dia o més, com per exemple el pèndol de Foucault, els efectes no inercials de la rotació diària de la Terra ja són notables i cal prendre un sistema de referència amb l'origen al centre de la Terra i uns eixos orientats segons tres direccions estacionàries relativament als estels llunyans (el que per raons històriques s'anomena *els estels fixos*). Si l'observació dura mesos, el laboratori aproximadament inercial adient té l'origen en el centre de masses del sistema solar i l'orientació dels eixos és estacionària en els estels fixos, etc.

Si no diem el contrari, tots els sistemes de referència que utilitzarem seran inercials. En tots ells l'espai és homogeni i isòtrop (és a dir, és igual en qualsevol punt i en qualsevol direcció) i el temps és homogeni.

1.2 Principi de relativitat de Galileu

Quan parlem d'un *principi de relativitat* volem dir que hi ha tota una classe de sistemes de referència per als quals les lleis d'un cert domini de la física tenen la mateixa forma.

La formulació original del principi de relativitat de Galileu es troba en la segona

jornada del *Diàleg sobre els dos sistemes màxims*.⁴ Després d'esmentar un seguit de fenòmens observats sota la coberta d'una nau: el vol dels insectes, el goteig d'un vas sobre un gibrell col·locat a sota, etc.

«SALVIATI: [...] Observeu atentament totes aquestes coses de manera que no hi hagi dubte que ha de ser així mentre el vaixell està quiet i feu moure la nau amb la velocitat que vulgueu; si el moviment és uniforme i no fluctua, d'una banda a l'altra, vos no reconeixereu el més petit canvi en tots els efectes esmentats i per cap d'ells no podreu escatir si la nau es mou o està quieta [...]»

i en uns termes més actuals:

Per mitjà d'experiments de mecànica no podrem posar de manifest l'estat de repòs o de moviment uniforme del laboratori.

Tanmateix l'exemple següent sembla contradir aquest principi. Suposem que deixem caure un objecte des d'un tren que viatja a velocitat constant respecte al terra. Des del tren veurem que cau a sota nostre, amb una trajectòria rectilínia, mentre que un observador fix a la via veurà que descriu una paràbola. Aparentment les «lleis del moviment» de la pedra són diferents en els dos sistemes inercials, el lligat a la via i el lligat al tren. Però si hi pensem una mica més ens adonem que no hi ha aquesta contradicció. La descripció completa de l'experiment és, segons el tren: «una pedra deixada en repòs cau verticalment», i segons la via: «una pedra projectada horitzontalment cau seguint una paràbola». És més, si la formulem en termes de l'acceleració, la llei és la mateixa en tots dos casos, solament canvien les condicions inicials, que són diferents en els dos sistemes de referència inercials.

Per poder comparar les lleis de la física expressades en diferents sistemes de referència ens cal saber com es transformen les magnituds físiques en passar de l'un a l'altre. En particular, les coordenades d'espai i de temps, però també la massa, la càrrega elèctrica, les forces, els camps, etc.

Aquestes lleis de transformació són el resultat d'hipòtesis basades en l'evidència empírica.⁵ En el cas de les coordenades d'espai i de temps, les lleis de transformació se segueixen de les propietats geomètriques que hem suposat a la secció (1.1).

1.2.1 Les transformacions de Galileu

Són les transformacions que a la mecànica newtoniana relacionen les coordenades i el temps, (x_1, x_2, x_3, t) i (x'_1, x'_2, x'_3, t') , segons dos sistemes de coordenades inercials, \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament.

⁴GALILEI, Galileo, *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*, Círculo de Lectores (Barcelona, 1997).

⁵El creixement de l'experiència acumulada pot fer variar aquesta *evidència empírica* i eventualment obligar-nos a variar algunes d'aquestes hipòtesis junt amb les lleis de transformació que se'n deriven, com veurem en el capítol 2.

Com que el temps de la mecànica newtoniana és absolut, si suposem que els rellotges de \mathcal{K} i \mathcal{K}' són idèntics —bateguen al mateix ritme— la relació de transformació ha de ser:

$$t' = t - t_0. \quad (1.3)$$

que només permet un canvi en l'origen de temps (t_0 és el que indica el rellotge de \mathcal{K} quan el de \mathcal{K}' indica 0).

Per a les coordenades cartesianes d'espai, suposarem que \mathcal{K} i \mathcal{K}' han escollit eixos amb vectors directores ortogonals unitaris $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ i $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$, respectivament, no necessàriament paral·lels, i han escollit els orígens de coordenades coincidents quan $t = 0$.

El lloc P' de l'espai de referència de \mathcal{K}' caracteritzat per les coordenades (x'_1, x'_2, x'_3) defineix amb O' el vector

$$\overrightarrow{O'P'} \equiv \vec{x}' = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3.$$

Els components són: $x'_i = \hat{e}'_i \cdot \vec{x}'$.

En qualsevol instant els llocs de l'espai de referència de \mathcal{K}' estan superposats amb els llocs de l'espai de \mathcal{K} . En l'instant $t = 0$, O coincideix amb O' i P amb P' , de manera que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P'}$, mentre que en l'instant t el lloc P' coincideix amb un altre lloc Q de l'espai de \mathcal{K} . Com que l'espai \mathcal{K}' es mou rígidament en bloc a velocitat \vec{V} respecte a \mathcal{K} , $\overrightarrow{PQ} = t \vec{V}$, i de la igualtat $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$ en resulta

$$\overrightarrow{O'P'} + t \vec{V} = \overrightarrow{OQ}. \quad (1.4)$$

Un esdeveniment que s'ha produït en el lloc Q de l'espai de \mathcal{K} tindrà unes coordenades x_i , $i = 1, 2, 3$, tals que: $\overrightarrow{OQ} \equiv \vec{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3$. Per saber-ne les coordenades segons \mathcal{K}' , usarem (1.4) i tindrem:

$$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{V} t \quad (1.5)$$

i també:

$$x'_j = \hat{e}'_j \cdot \vec{x}' = \sum_{i=1}^3 R_{ji} (x_i - V_i t),$$

on $R_{ji} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_i$, $i, j = 1, 2, 3$, és la matriu ortogonal⁶ que relaciona els triedres ortonormals dels dos sistemes de referència.

Si a més permetem que els orígens de coordenades de \mathcal{K} i \mathcal{K}' no coincideixin en $t = 0$, obtenim la transformació de Galileu més general:

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 R_{ji} (x_i - V_i t - b_i), \quad t' = t - t_0, \quad (1.6)$$

⁶Les transformacions ortogonals són les que conserven l'expressió pitagòrica (1.1) per a la distància euclidiana. Aquí ens limitarem a les rotacions, que són aquelles que tenen determinant igual a 1.

on b_i són les coordenades segons \mathcal{K} de l'origen de coordenades O' de \mathcal{K}' en $t = 0$.

El conjunt d'aquestes lleis de transformació constitueixen el que anomenem *grup de Galileu*. Aquest grup deixa invariant la distància euclidiana (1.1) i els intervals de temps per separat.

Tornem ara a la transformació (1.5) i suposem que $\vec{x}(t)$ és l'equació de la trajectòria d'una massa puntual m segons \mathcal{K} . La trajectòria segons \mathcal{K}' serà: $\vec{x}'(t) = \vec{x}(t) - \vec{V}t$. Si derivem respecte a $t = t'$ obtenim la *lei d'addició de velocitats de Galileu*:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}, \quad (1.7)$$

on \vec{v} i \vec{v}' representen les velocitats de la massa puntual en els sistemes de referència \mathcal{K} i \mathcal{K}' , respectivament.

Com a conseqüència d'aquesta llei d'addició, les interaccions invariants per les transformacions de Galileu s'han de transmetre instantàniament, és a dir, amb una velocitat infinita, ja que d'acord amb (1.7) qualsevol velocitat de transmissió finita canvia en passar d'un sistema inercial a un altre.

1.2.2 Invariància galileiana de la mecànica de Newton

Vegem ara com es transforma la segona llei de Newton sota (1.5). En un cert sistema inercial \mathcal{K} tenim:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}. \quad (1.8)$$

Si tornem a derivar (1.7), tenim:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2}.$$

Pel que fa a la massa inert, m , a la mecànica newtoniana és la *quantitat de matèria*, mentre que \vec{F} és la força resultant de les accions d'altres cossos sobre la massa puntual considerada. Sembla doncs plausible suposar que ni l'una ni l'altra depenen del sistema de referència que descrigui el moviment i les prendrem invariants:

$$m = m', \quad \vec{F} = \vec{F}'. \quad (1.9)$$

D'acord amb aquestes consideracions, en el sistema de referència inercial \mathcal{K}' , (1.8) es converteix en:

$$\vec{F}' = m' \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2}.$$

Les equacions de la mecànica de Newton són les mateixes en \mathcal{K} i en \mathcal{K}' , i pel que fa al domini de la mecànica tots els sistemes de referència inercials són indistingibles.

La notació emprada amb vectors i escalars ja implica el bon comportament sota rotacions i és fàcil comprovar que sota translacions d'espai i de temps l'equació (1.8) no canvia.

El principi de relativitat també pot enunciar-se dient que les equacions fonamentals de la mecànica són invariants sota les transformacions de Galileu. Aquesta invariància deixa de valer per a sistemes de referència més generals, els anomenats *sistemes rígids*, basats en un triedre rígid de referència, però animats de moviments de translació i rotació arbitraris relativament a un sistema de referència inercial. Tanmateix, per a aquesta classe més àmplia de sistemes la llei (1.8) manté la mateixa forma si hi afegim al costat esquerre les forces d'inèrcia corresponents: la força centrífuga, la de Coriolis i la d'arrossegament.

1.2.3 Transformacions de Galileu i electromagnetisme

La teoria de Maxwell de l'electromagnetisme es concreta en les equacions de Maxwell, que, en el buit i en el sistema d'unitats internacional (SI), s'escriuen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0, \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \quad (1.11)$$

on $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ C}^{-2} \text{ kg m}$ i $\epsilon_0 = 1/(36\pi 10^9) \text{ C}^2 \text{ kg}^{-1} \text{ m}^{-3} \text{ s}^2$.

Hem separat el primer parell d'equacions (homogènies) del segon parell (inhomogènies) perquè, com ja veurem en el capítol 8, tenen papers diferents i els comportaments sota canvis de sistemes de referència també són diferenciats (vegeu l'exemple 1.1).

En ser les variables \vec{E} i \vec{B} vectorials i les dades també vectorials, \vec{j} , o escalars, ρ , i en ser els operadors vectorials, com ara $\vec{\nabla}$, o escalar, ∂_t , i aparèixer a més combinats com a productes escalars o vectorials, és immediat comprovar que aquestes equacions són invariants sota els canvis de coordenades cartesianes en un mateix sistema de referència:

$$x'_i = \sum_{l=1}^3 R_{il} x_l + C'_i, \quad t' = t + t'_0$$

amb el benentès que les variables es transformin d'acord amb:

$$\begin{aligned} E'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} E_l(\vec{x}, t), & B'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} B_l(\vec{x}, t), \\ j'_i(\vec{x}', t') &= \sum_{l=1}^3 R_{i'l} j_l(\vec{x}, t), & \rho'(\vec{x}', t') &= \rho(\vec{x}, t). \end{aligned}$$

Tanmateix les equacions de Maxwell (1.10) i (1.11) no són invariants sota canvis de sistema de referència inercial, com es demostra en l'exemple 1.1.

Tampoc no és invariant sota transformacions de Galileu l'equació de propagació de les ones electromagnètiques en el buit, en absència de càrregues i corrents:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t^2 \vec{B} = 0. \quad (1.12)$$

D'acord amb aquestes equacions, les solucions de les equacions de Maxwell lliures en el buit són ondulatòries i es propaguen amb una velocitat $(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$, la mateixa en totes les direccions. Aquesta *velocitat crítica* de l'electromagnetisme té a veure amb la relació entre les unitats electrostàtica i electromagnètica de càrrega elèctrica i, amb els valors en el SI que hem donat més amunt, val $3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$. Weber i Kolrausch (1856) van determinar aquesta constant mesurant una mateixa càrrega per mètodes electrostàtics —pel potencial d'una ampolla de Leyden— i per mitjans electromagnètics —per l'oscil·lació produïda per la descàrrega resultant a través del quadre d'un galvanòmetre. El valor obtingut per a aquesta velocitat crítica va ser de $310.740 \text{ km s}^{-1}$. La semblança entre aquest valor i el conegut a l'època per a la velocitat de la llum en el buit van induir Maxwell a considerar que la llum és un fenomen electromagnètic ondulatori.

Exemple 1.1 Equacions de Maxwell i grup de Galileu

Haurem de veure primer com es transformen els camps \vec{E} i \vec{B} sota una transformació de Galileu (1.5). Si tenim en compte (1.7), la llei de força de Lorentz: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, l'expressió anàloga per a \vec{F}' , i el fet que $\vec{F} = \vec{F}'$ i $q = q'$, arribem a:

$$\vec{B} = \vec{B}', \quad \vec{E} = \vec{E}' - \vec{V} \times \vec{B}'. \quad (1.13)$$

De la transformació (1.5) i d'aplicar la regla de la cadena obtenim que els operadors es transformen d'acord amb:

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}', \quad \partial_t = \partial_{t'} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla}'. \quad (1.14)$$

Una llei de transformació plausible per a les densitats de càrrega i corrent seria:

$$\rho = \rho', \quad \vec{j} = \vec{j}' + \rho' \vec{V}. \quad (1.15)$$

La primera és conseqüència del fet que tant la càrrega elèctrica com l'element de volum no canvien en passar d'un sistema de referència a l'altre, mentre que la segona té compte del corrent de deriva que s'aprecia des de \mathcal{K} en veure una densitat de càrrega ρ' que es mou en bloc a velocitat \vec{V} .

Si substituïm (1.13), (1.14) i (1.15) en (1.10) i (1.11), obtenim que el primer parell és invariant mentre que el segon no ho és.

Del punt de vista de Maxwell no ha de ser sorprenent que les equacions de l'electromagnetisme no siguin invariants sota transformacions de Galileu. En efecte, per a Maxwell \vec{E} i \vec{B} representen estats de moviment local d'un medi, l'*èter electromagnètic*, i no és estrany que en el sistema de referència inercial \mathcal{K}_0 en què l'èter és estacionari les equacions de l'electromagnetisme siguin més senzilles. En qualsevol altre sistema de referència hauriem de tenir en compte els efectes del *vent d'èter*. En particular, aquests efectes haurien de manifestar-se en un laboratori terrestre.

1.3 Electrodinàmica dels cossos en moviment

L'electrodinàmica de Maxwell va ser completada per Hertz i Lorentz seguint camins totalment diferents per tal de tenir en compte el moviment dels cossos.

L'objectiu de la teoria de Hertz és que el principi de relativitat de la mecànica es pugui estendre d'alguna manera a l'electrodinàmica de Maxwell. Així demana que les equacions conservin la forma en aplicar una transformació de Galileu. Per això substitueix la derivada parcial respecte al temps per una derivada temporal seguint el moviment del cos —un anàleg a les equacions de Lagrange dels medis continus— d'aquesta manera quan el cos no es mou es recuperen les equacions de Maxwell.

Aquests canvis no afecten ni les equacions constitutives ni les equacions en què apareixen les divergències de \vec{B} i \vec{D} , però sí les equacions en què surten els rotacionals dels camps, que en l'electrodinàmica de Hertz són (en el buit):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} - \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 (\partial_t \vec{E} + \vec{v} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + \vec{\nabla} \times (\vec{E} \times \vec{v})) &= \mu_0 \vec{j}.\end{aligned}$$

Lorentz segueix el camí invers; busca les transformacions que deixin invariant l'electrodinàmica de Maxwell davant la impossibilitat experimental manifesta de detectar efectes electromagnètics en sistemes que es mouen a velocitat constant respecte a l'èter. Primer troba unes transformacions aproximades a primer ordre en v/c , més tard a segon ordre i finalment, l'any 1904, troba les lleis de transformació exactes. En aquestes lleis el temps es transforma d'una manera que depèn del punt. Això era contrari a la noció que a l'època es tenia del temps absolut. Per això, la variable temps que apareix en les seves equacions l'anomena *temps local*, segons Lorentz, només és un artefacte matemàtic. Pel que fa a la transformació de les coordenades d'espai, ha de transformar les longituds de manera diferent segons la direcció. Les longituds paral·leles a la direcció del moviment sofreixen una contracció (seguint un suggeriment de FitzGerald) que es justifica per la modificació de les forces electromagnètiques que en definitiva són les responsables de mantenir l'estructura dels sòlids.

La intenció d'aquestes teories era explicar els resultats negatius de diversos intents de detectar els efectes electrodinàmics o òptics associats al moviment d'un laboratori terrestre respecte a l'èter.

En qualsevol cas l'efecte esperat era petit, per tal com depenia del quocient v/c o del seu quadrat. Així, es parla d'experiments de primer ordre o de segon ordre. A continuació n'esmentarem alguns.

1.3.1 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v/c

L'experiment de Wilson (1905) Una làmina dielèctrica i no magnètica es mou amb velocitat v entre les plaques d'un condensador, immers en un camp magnètic constant H paral·lel al condensador i perpendicular a v . S'observa una

sobrecàrrega de les plaques de densitat superficial $(\epsilon - 1)Hv/c$. Aquest resultat abona la teoria de Lorentz contra la de Hertz, segons la qual la sobrecàrrega ha de ser $\epsilon Hv/c$.

El dispositiu experimental de Wilson consisteix en un condensador cilíndric d'ebonita, que gira al voltant del seu eix, en un camp magnètic paral·lel a l'eix del cilindre.

L'any 1901 Blondlot va intentar un experiment semblant amb aire com a dielèctric. En ser l'efecte proporcional a $\epsilon - 1$, la sobrecàrrega no era prou gran per ser observable.

L'experiment de Röntgen (1885) En electricitat tenim càrregues reals i càrregues associades a la polarització d'un dielèctric. Sobre les cares d'una làmina dielèctrica entre les plaques d'un condensador pla hi apareix una distribució superficial de càrrega $\pm(\epsilon - 1)\epsilon_0 E$ (on E és el camp elèctric). En els experiments de Röntgen i d'Eichenwald aquesta làmina dielèctrica té la forma de disc i, en girar, el producte de la càrrega dielèctrica per la velocitat dóna un corrent de conducció.

1.3.2 Experiments d'electrodinàmica d'ordre v^2/c^2

L'experiment de Trouton i Noble (1903) Segons la teoria de Lorentz, un condensador carregat que es mou respecte a l'èter amb velocitat v ha d'experimentar un parell de moment proporcional a v^2/c^2 . A proposta de FitzGerald (1901), Trouton i Noble (1903) van intentar mesurar aquest parell sobre un condensador suspès d'un fil elàstic en un laboratori terrestre. El resultat va ser negatiu.

Un esquema molt simplificat de l'experiment consistiria en el següent (vegeu la figura).

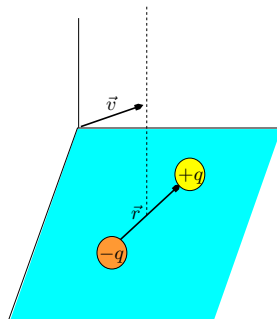
Representem les plaques del condensador per dues càrregues puntuals $\pm q$, separades una distància r , que es mouen en bloc respecte a l'èter amb velocitat \vec{v} , de manera que estan en repòs relatiu. La força sobre la càrrega positiva serà: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, sent \vec{E} el camp coulombià i

$$\vec{B} = \frac{-q\mu_0}{4\pi r^3} \vec{v} \times \vec{r},$$

el camp magnètic, creats per la càrrega negativa.

Sobre la càrrega negativa hi actua una força igual i de sentit contrari. El moment del parell de forces és doncs:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = -q(\vec{r} \cdot \vec{v})\vec{B},$$



que en magnitud val:

$$M = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{v^2}{c^2 r} \sin 2\theta, \quad (1.16)$$

sent θ l'angle format per \vec{r} (la direcció normal a les plaques del condensador) i \vec{v} (la direcció del moviment respecte a l'èter).

En l'experiment, un condensador era suspès d'un fil elàstic de manera que, per a la direcció esperada de \vec{v} , $\theta = 45^\circ$, si $M \neq 0$, el fil experimenta una torsió de manera que s'arriba a una posició d'equilibri en què el moment del fil equilibra M . Com que l'angle θ varia contínuament per efecte de la rotació de la Terra, la posició d'equilibri haurà de variar al llarg del dia. No es van observar els canvis esperats.

1.4 Òptica. La velocitat de la llum

Abans d'entrar a estudiar els efectes del moviment en el domini de l'òptica farem un breu repàs de les determinacions de la velocitat de la llum. Això ens ajudarà a comprendre els intents d'estudiar-ne les variacions.

1.4.1 La velocitat de la llum en el buit

L'estimació de Rømer Era conegut que els eclipsis d'un dels satèl·lits de Júpiter, Ió, es retarden o s'avancen segons l'època de l'any. Rømer va suggerir que aquest efecte pot ser degut al fet que la llum es propaga a velocitat finita i que la Terra, en el seu moviment de translació anual, s'apropa o s'allunya de Júpiter. L'any de Júpiter és d'uns 12 anys terrestres, podem suposar doncs que en un any

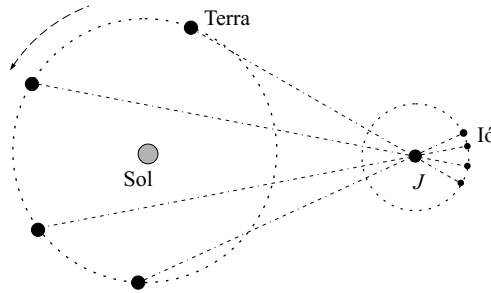


Figura 1.1. Els eclipsis d'Ió i les observacions des de la Terra

Júpiter pràcticament no es mou de lloc. Com que el radi de l'eclíptica és petit comparat amb la distància de la Terra a Júpiter, podem suposar també que els

eclipsis d'Ió sempre es produeixen en passar aquest pel mateix lloc i, per tant, a intervals de temps regulars, $\tau \approx 42$ h. Ara bé, entre dos eclipsis consecutius, la Terra s'haurà mogut i el retard amb què arribarà la informació que s'ha produït l'eclipsi serà diferent per a l'un i l'altre.

El temps necessari per observar n eclipsis des de la Terra és:

$$t_n = n\tau + (l_n - l_0)/c,$$

on l_n és la distància de la Terra a Júpiter en observar-se l' n -èsim eclipsi. Si en un any sencer es veuen N eclipsis, tindrem que, per haver passat un any $l_N = l_0$ i, per tant, $\tau = t_N/N$. I si durant mig any comptem M eclipsis,

$$t_M = M\tau + (l_M - l_0)/c.$$

Rømer (1676) mesurà un retard de la llum en travessar el radi de l'eclíptica d'uns 10 minuts.

Si comptem els eclipsis que es produeixen en mig any, la Terra haurà passat de la posició més propera a Júpiter a la més llunyana i $l_M - l_0$ serà el diàmetre de l'eclíptica. Tindrem, doncs:

$$c = \frac{l_M - l_0}{t_M - M\tau}.$$

La mesura de Fizeau Fizeau determinà per primera vegada la velocitat de la llum en el laboratori mitjançant el dispositiu de la figura 1.4.1.

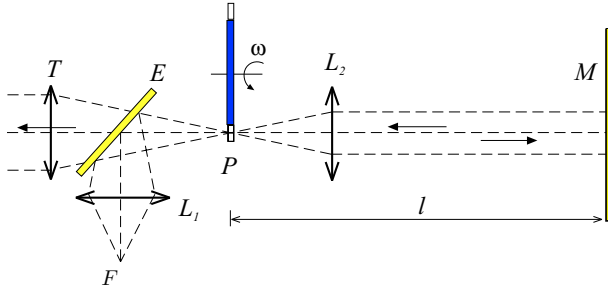


Figura 1.2. Mesura de la velocitat de la llum per Fizeau

Per mitjà de la lent L_1 i la làmina semiargenta E , la llum produïda en la font F es concentra en P , a la vora de la roda dentada, passa, es reflecteix en el mirall M i torna. Si en tornar no troba una dent i passa, és recollida pel telescopi T . La roda dentada gira a una velocitat angular ω que pot variar-se de forma contínua.

La llum triga un temps $\Delta t = 2l/c$ en anar de la roda dentada al mirall i tornar. Només passarà i arribarà al telescopi si primer troba forat i en tornar també, és a dir, si en aquest temps la roda ha girat un nombre sencer de dents:

$$\omega \Delta t = n2\pi/N,$$

on N és el nombre de forats de la roda dentada. Així, doncs, només passarà llum quan:

$$\omega = n\omega_1 \quad \text{amb} \quad \omega_1 \equiv \frac{\pi c}{Nl},$$

és a dir, per a velocitats angulars ω múltiples d'una velocitat *fonamental* ω_1 . Això ens permet de mesurar ω_1 , i per tant determinar c a partir de la relació:

$$c = \frac{Nl\omega_1}{\pi}.$$

Cal remarcar, d'una banda, que el resultat de la mesura de Fizeau és una estimació de la velocitat mitjana de la llum en un viatge d'anada i tornada. Si tinguéssim raons per fer la hipòtesi que la velocitat de la llum és la mateixa independentment de la direcció, llavors aquest experiment ens donaria el seu valor.

Respecte a què? A conseqüència de la llei d'addició de velocitats (1.7), la hipòtesi anterior només pot ser vàlida per a un sistema de referència i, per tant, cal demanar-se també: respecte a què és la velocitat obtinguda? Les dues teories de la naturalesa de la llum donen respostes diferents. Segons la teoria corpuscular (Newton), es tracta d'una velocitat de transmissió respecte al cos emissor, mentre que segons la teoria ondulatòria és una velocitat de propagació relativa al medi suport, l'èter.

Deixant de banda que, a mitjan segle XIX, després dels arguments aportats pels experiments d'interferències de Young i d'altres, la teoria corpuscular ja era poc sostenible, resulta que si la velocitat de propagació de la llum respecte a l'emissor fos la mateixa en qualsevol direcció, s'hauria d'observar efectes estranys en els sistemes dobles d'estels llunyans. Suposem un sistema format per dos estels

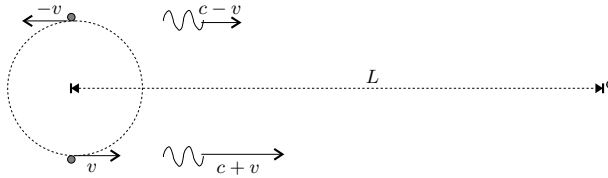


Figura 1.3. Teoria de l'emissor per a un sistema doble d'estels

de masses semblants que orbiten al voltant del seu centre de masses, amb una

velocitat v ; la velocitat de la llum procedent del component que s'apropa seria $v + c$ i la del que s'allunya $c - v$. Així, el retard amb què des de la Terra es veurien les dues posicions simultànies seria diferent:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{L}{c - v} - \frac{L}{c + v} = \frac{2Lv}{c^2 - v^2} \approx \frac{2Lv}{c^2}.$$

Si el sistema és molt lluny, aquest retard pot ser comparable al període orbital dels estels, i podria donar-se que veiéssim un estel simultàniament en dos llocs diferents i altres fenòmens que no han estat observats.

1.4.2 Òptica. Efectes d'ordre v/c

Un dels fenòmens en què es manifesta el moviment relatiu de la font emissora i del receptor és l'efecte Doppler: la freqüència de la llum emesa (o qualsevol altre fenomen ondulatori) és diferent de la freqüència de la llum rebuda. Una explicació elemental és que si el receptor s'acosta a la font rep més ones per unitat de temps perquè «va a trobar-les», mentre que si se n'allunya en rep menys perquè «les defuig». La fórmula clàssica d'aquest efecte, que estudiarem en detall més endavant, és:

$$\nu_R = \nu_E \frac{1 - v_R/c}{1 - v_E/c},$$

on ν_R és la freqüència de l'ona rebuda, ν_E , la de l'emesa i v_E i v_R les projeccions sobre la direcció de propagació de la velocitat de la font i del receptor relatives a l'èter. Si v_E és petita comparada amb c , val l'aproximació a primer ordre:

$$\nu_R \approx \nu_E (1 + v/c),$$

on $v = v_E - v_R$ és el component de la velocitat relativa en la direcció de propagació.

L'aberració estel·lar Un altre fenomen interessant és el conegut com a *aberració estel·lar*. Va ser descobert per primer cop per l'astrònom J. Bradley (1727) i consisteix en un moviment el·líptic de semieix major $21''$ i periodicitat anual que presenten tots els estels. Aquí en presentarem una explicació senzilla, basada en la teoria corpuscular de la llum, però també pot explicar-se en el marc de la teoria ondulatoria, sempre que l'èter no es vegi afectat pel moviment de la Terra.

Si observem l'estel E des de la Terra, el telescopi es mou respecte a l'estel amb una velocitat \vec{v} , la del moviment de la Terra. Considerem un corpuscle de llum procedent de E que va al telescopi T amb una velocitat \vec{c} , segons es representa en la figura 1.4. Si orientem el telescopi en la direcció de \vec{c} , la llum no arriba a l'ocular perquè en el temps que la llum es mou telescopi avall aquest s'ha desplaçat i la llum xoca contra les parets. Així doncs, perquè la llum arribi a l'ocular hem d'orientar el telescopi en la direcció de

$$\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}, \quad (1.17)$$

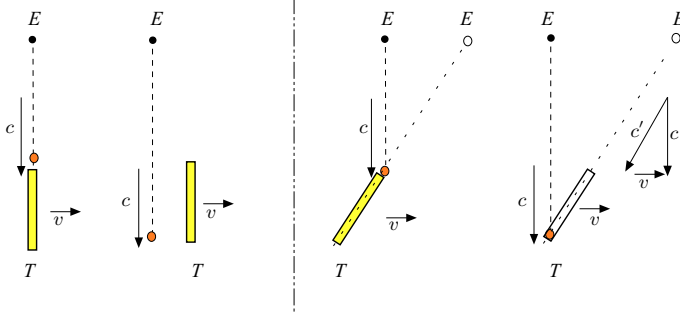


Figura 1.4. Orientació del telescopi per poder observar l'estel des de la Terra

i la posició aparent de l'estel serà la donada pel vector unitari $-\hat{c}'$. Si diem α' a l'angle en què es veu l'estel des de la Terra en moviment i α el que es mesuraria en un sistema de referència en repòs en el centre de masses del sistema solar, la relació de suma (1.17) dona:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha + v}. \quad (1.18)$$

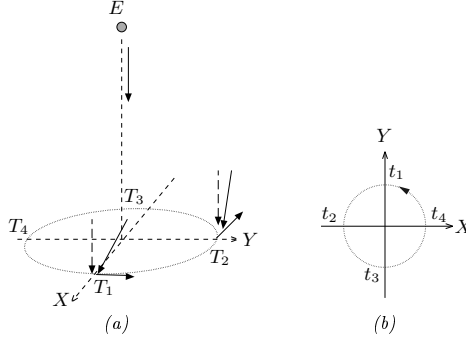


Figura 1.5. (a) Esquema del moviment anual de la Terra i l'observació d'un estel en la direcció perpendicular al pla de l'eclíptica. (b) La successió de posicions aparents: quan la Terra és en la posició 1, el telescopi ha d'apuntar lleugerament endavant i això dona una posició aparent en la direcció positiva de l'eix Y

Si observem un estel que és en la direcció ortogonal al pla de l'eclíptica i infinitament lluny, ens trobarem amb la situació descrita a la figura 1.5. La figura

1.5(a) representa les diverses posicions de la Terra sobre l'eclíptica, que suposem circular. A la figura 1.5(b) hi representem les posicions aparents de l'estel E . Així, el punt O correspondria a la posició d'un estel que es veïés just sobre la vertical de l'eclíptica; els punts t_i , $i = 1, 2, 3, 4$ són les posicions aparents de l'estel E quan la Terra és en els llocs T_i , $i = 1, 2, 3, 4$ de l'eclíptica. En aquest cas la posició aparent de l'estel descriu una circumferència de radi v/c .

Si observem un estel en el pla de l'eclíptica tindrem la situació descrita a la figura 1.6, que cal llegir d'una forma anàloga a la figura 1.5. La trajectòria aparent de l'estel és un moviment oscil·latori d'amplitud v/c .

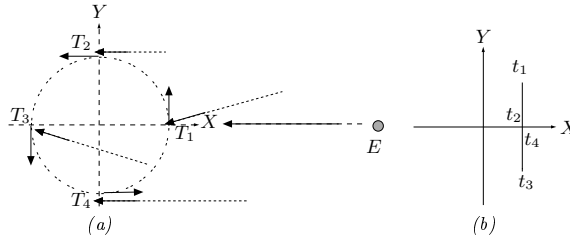


Figura 1.6. Aberració per a un estel en el pla de l'eclíptica. (a) Posicions de la Terra en el seu moviment sobre l'eclíptica. (b) La successió de posicions aparents, corresponents a les de la figura a), fa una oscil·lació

Per a estels en posicions intermèdies, la posició aparent descriu una el·lipse de semieix major v/c . Com que la velocitat orbital de la Terra és d'uns 30 km s^{-1} , aleshores $v/c \approx 10^{-4} \text{ rad} \approx 21''$.

No s'ha de confondre aquest moviment amb la paral·laxi, que és també un moviment aparent degut a la posició variable de la Terra sobre l'eclíptica i que disminueix amb la distància D a què es troba l'estel i és molt més petit, de l'ordre de R/D , on R és el radi de l'eclíptica. Per als estels més propers és de l'ordre de $0,1''$ d'arc. A més, la paral·laxi és avançada en fase $\pi/2$ respecte a l'aberració.

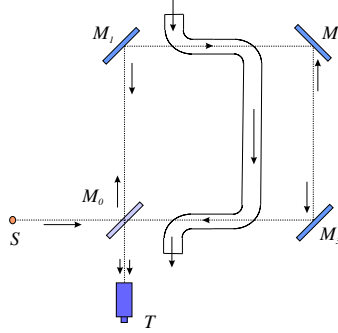
La velocitat de la llum en un medi que es mou La velocitat de la llum en un medi refringent d'índex de refracció n és c/n . En el marc de la teoria de propagació en l'èter, l'afirmació anterior té sentit si el medi està en repòs respecte a l'èter. Si el medi es mou amb velocitat v , hi ha diverses possibilitats. Si val la llei d'addició de velocitats, conseqüència del principi de relativitat de la mecànica, la velocitat de propagació de la llum respecte al laboratori serà $c/n \pm v$, segons si la considerem en el sentit del moviment del medi o en el contrari. (En termes de propagació en l'èter diríem que l'èter contingut en el medi és totalment arrossegat pel moviment d'aquest medi.)

Una altra possibilitat consisteix en el fet que l'èter sigui només parcialment arrossegat pel medi, de manera que la velocitat de propagació sigui $c/n \pm \alpha v$, segons el sentit sigui cap endavant o endarrere, on $0 \leq \alpha \leq 1$ és el coeficient

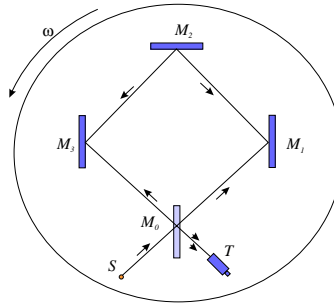
d'arrossegament. Fresnel (1824) va elaborar tota una argumentació teòrica per obtenir que $\alpha = 1 - 1/n^2$, si bé altres autors (Stokes) argumentaven que havia de valer 1.

L'experiment de Fizeau (1851) per determinar el coeficient d'arrossegament dóna la raó a Fresnel. Consisteix a comparar per interferometria els camins òptics de dues ones lluminoses, l'una que recorre el circuit de la figura en el sentit $M_0M_1M_2M_3M_0$ i l'altra, en el sentit $M_0M_3M_2M_1M_0$.

En tots dos casos hi ha trams en què la llum es propaga en el si d'un medi (aigua) en moviment: en el primer cas la propagació i la velocitat de l'aigua van en el mateix sentit, de manera que la velocitat de propagació és $c/n + \alpha v$, i en el segon van en sentit contrari i la velocitat de propagació és $c/n - \alpha v$. D'aquesta manera, el camí òptic és diferent per als dos trajectes i la diferència depèn de v . Comparant els patrons d'interferència per a l'aigua en repòs o amb l'aigua fluint a una velocitat v , es pot determinar el coeficient d'arrossegament α .



L'efecte Sagnac Consisteix en l'efecte del moviment de rotació del laboratori sobre la velocitat de propagació de la llum. El dispositiu de Sagnac (1914) consisteix en un disc que gira amb velocitat angular ω , amb tres miralls M_1 , M_2 i M_3 , i una làmina semiargenta M_0 , fixos en el disc. En arribar a M_0 la llum es divideix, una part recorre el circuit $M_0M_1M_2M_3M_0$, a favor del moviment de rotació, i l'altra, el circuit $M_0M_3M_2M_1M_0$, contra el moviment del disc. S'observa el patró d'interferència en el telescopi i es compara amb el que es té quan el disc no gira. S'observa un desplaçament de les franges d'interferència proporcional a la velocitat angular i a l'àrea delimitada pel circuit, d'acord amb les previsions teòriques.



Harres (1912) va realitzar un experiment semblant en què la llum era obligada a seguir el circuit tancat per mitjà d'un seguit de prismes. En aquest cas, la llum es propaga en un laboratori que gira i també en un medi que es mou. L'experiment de Harres és doncs una combinació dels experiments de Sagnac i de Fizeau.

1.4.3 Òptica d'ordre v^2/c^2 . L'experiment de Michelson

En el marc de la teoria electromagnètica i l'òptica de finals del segle XIX, el sistema de referència inercial estacionari en l'èter —el suport de les ones lluminoses— té un lloc privilegiat perquè, respecte a aquest sistema de referència, les ones electromagnètiques es propaguen amb la mateixa velocitat c en totes les direccions. Un laboratori terrestre es mou amb una certa velocitat, \vec{v} , respecte a l'èter⁷ i per tant la velocitat de la llum en aquest laboratori haurà de dependre de la direcció de propagació.

En efecte, d'acord amb la llei galileiana d'addició de velocitats, la velocitat de propagació de la llum en el laboratori terrestre serà: $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$, i si θ és l'angle que formen la direcció de propagació en el laboratori i la del moviment relatiu, tindrem:

$$\begin{aligned} c'(\theta) &= c \left(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \beta \cos \theta \right) \\ &\approx c \left(1 - \beta \cos \theta - \frac{\beta^2}{2} \sin^2 \theta + O(\beta^4) \right) \quad \text{amb } \beta \equiv v/c. \end{aligned} \quad (1.19)$$

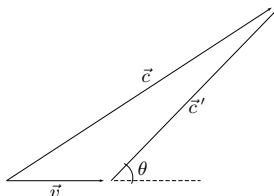


Figura 1.7. En un laboratori terrestre la velocitat de la llum depèn de la direcció θ

El mateix Maxwell s'adonà d'aquest efecte i del fet que les mesures terrestres de la velocitat de propagació de la llum donaven la velocitat mitjana sobre un camí d'anada i tornada. A conseqüència d'això, el terme de primer ordre en β es compensa i només queda l'efecte d'ordre β^2 . Si es pren la velocitat orbital de la Terra com a estimació de v , resulta $\beta^2 \approx 10^{-8}$ i l'efecte d'anisotropia (1.19), proporcional a β^2 , era massa petit per poder ser mesurat amb els instruments de l'època (finals de la dècada de 1870).

Gairebé per aquell temps Albert A. Michelson va desenvolupar un instrument d'alta precisió per comparar camins òptics, l'interferòmetre de Michelson, i va intentar aplicar-lo a mesurar els efectes del moviment de la Terra sobre la propagació de la llum. Aquest va ser l'objectiu dels experiments de Michelson (1881) i de Michelson i Morley (1887).

⁷Per bé que aquesta velocitat és variable, la seva variació és lenta i per a experiments de curta durada el laboratori es comportarà com un sistema de referència molt aproximadament inercial.

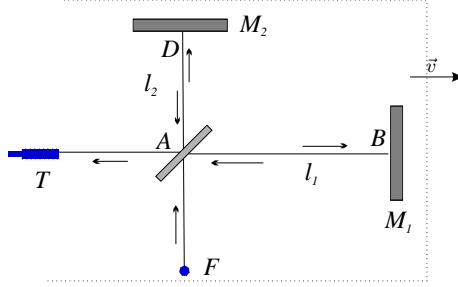


Figura 1.8. Esquema de l'interferòmetre de Michelson

L'interferòmetre de Michelson funciona de la manera següent. En arribar a la làmina semiargenta A, el feix de llum monocromàtica procedent de la font F es divideix en dos, un que segueix recte fins a reflectir-se en el mirall M_2 i un altre que surt en la direcció del mirall M_1 , on també es reflecteix. Els dos feixos de retorn travessen la làmina semiargenta i interfereixen en T , cosa que produeix una figura d'interferència que depèn de la diferència dels camins òptics respectius (o, equivalentment, dels temps de viatge).

Per fer-nos una idea de què podia mesurar aquest experiment suposarem que l'interferòmetre està orientat de la manera més favorable: que el braç AB , de longitud l_1 , és paral·lel a la direcció del moviment, mentre que l'altre braç, AD , de longitud l_2 , hi és perpendicular. Per al feix longitudinal, la velocitat de la llum en el camí AB ($\theta = 0$) és $c' = c - v$ i en el camí BA ($\theta = \pi$) és $c' = c + v$, de manera que el temps total emprat és:

$$t_1 = \frac{l_1}{(c-v)} + \frac{l_1}{(c+v)} = \frac{2l_1}{c(1-\beta^2)}.$$

Per al feix transversal ($\theta = \pm\pi/2$), la velocitat de la llum és la mateixa a l'anada i a la tornada, $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$, i el temps total emprat és:

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

La posició dels anells d'interferència depèn de la diferència de camins òptics d'acord amb:

$$\frac{c\Delta t}{\lambda} = \frac{c(t_2 - t_1)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{(1-\beta^2)} \right),$$

on λ és la longitud d'ona de la llum monocromàtica emprada. Com veiem, l'efecte és d'ordre β^2 . A més, el resultat també depèn de la longitud dels braços i no

hi ha cap manera d'assegurar que els braços de l'interferòmetre siguin iguals, o bé mesurar-los amb la precisió que demana aquest experiment. Per evitar aquest problema, Michelson va girar 90° tot l'aparell. D'aquesta manera el braç AB passa a tenir una posició transversal, i el temps emprat per la llum en el viatge de A a B i tornar és ara

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1-\beta^2}},$$

mentre que l'emprat en el viatge de A a D i tornada és

$$t'_2 = \frac{2l_2}{c(1-\beta^2)}.$$

La diferència de camins òptics haurà canviat i ara la posició dels anells d'interferència vindrà donada per:

$$\frac{c\Delta t'}{\lambda} = \frac{c(t'_2 - t'_1)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{l_2}{(1-\beta^2)} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right).$$

La diferència entre els dos efectes implica que les franges del segon espectre estan desplaçades respecte de les del primer en:

$$\begin{aligned} \frac{c(\Delta t' - \Delta t)}{\lambda} &= \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \left(\frac{1}{(1-\beta^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &\approx \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \left(1 + \beta^2 - 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) = \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2. \end{aligned}$$

Aquesta quantitat ens dona el desplaçament del segon espectre respecte del primer, en nombre de franges.

Si prenem el moviment de translació de la Terra com una estimació de la seva velocitat respecte a l'èter ($v \approx 3 \cdot 10^6 \text{ cm s}^{-1}$),⁸ per a un interferòmetre amb uns braços d'11 m de longitud i per a la llum groga del sodi ($\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$), resulta un desplaçament esperat de 0,37 franges. L'efecte observat va ser 10 cops més petit que l'esperat. Dins del marge d'error experimental era com si la Terra no es mogués respecte a l'èter.

Entre les possibles explicacions que es van considerar per interpretar aquest resultat negatiu cal destacar-ne les següents:

- l'èter és arrossegat totalment pel laboratori terrestre, de la mateixa manera que l'atmosfera és arrossegada per la Terra,
- l'anomenada *contracció de FitzGerald-Lorentz*, segons la qual tots els objectes es contrauen en la direcció del seu moviment relatiu a l'èter en un factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$, mentre que en les direccions transversals no es deformen, o

⁸La velocitat de rotació és més petita, $\omega R/c \approx 0,5 \cdot 10^5 \text{ cm s}^{-1}$.

- la llum es propaga amb la mateixa velocitat, c , en totes les direccions, però respecte a la font emissora (com correspondria a les teories d'emissió esmentades més amunt).

Totes tres explicacions tenen inconvenients. Si fos certa la primera, llavors caldria trobar una justificació per a l'aberració estel·lar. En efecte, en un marc ondulatori aquest fenomen s'explica pel moviment del telescopi respecte del medi en què es propaga l'ona lluminosa procedent de l'estel. Si el telescopi arrossegué totalment l'èter que conté no hi hauria aberració estel·lar.

La segona explicació és una suposició *ad hoc* que comporta la complicació d'explicar quines forces interatòmiques són les responsables d'aquesta deformació dels sòlids cristallins. De fet, Lorentz la va adoptar per obtenir les lleis de transformació de coordenades en la seva teoria de l'electró.

La tercera explicació implicaria, com ja hem comentat més amunt, que s'haurien d'observar imatges estranyes en els sistemes estel·lars dobles llunyans, i no és el cas. Si bé aquesta llei de propagació podria semblar descartable per ser més pròpia d'una teoria corpuscular de la llum que d'una teoria ondulatoria, a finals del segle XIX hi havia alguna teoria electromagnètica, com ara la teoria d'emissió de Riesz, que l'abonaven. Del punt de vista experimental, l'argument tampoc no és tan immediat a causa del que s'anomena *fenomen d'extinció*. La llum que ens arriba d'un estel no viatja en el buit sinó en un medi molt enrarit, de manera que la llum que rebem és la superposició d'una ona primària originada en la font i una de secundària radiada per les càrregues del medi que són accelerades per l'acció de l'ona primària. L'ona primària s'amorteix amb la distància —d'acord amb un paràmetre que s'anomena *longitud d'extinció* i que és més gran com més enrarit és el medi— i pràcticament no ens arriba. En l'observació dels dos components d'un sistema doble, només ens arriben l'ona secundària de cada estel, que s'han originat en el medi interestel·lar i que, segons les teories d'emissió, es mourien a velocitat c respecte d'aquest medi.

Cap d'aquests intents d'explicar el resultat negatiu és satisfactori. En el proper capítol veurem com la teoria de la relativitat especial resol aquest problema.

Problemes

- 1.1 Un avió es mou a 900 km/h respecte a l'aire en repòs des d'un punt A a un punt B distants 900 km i torna. Compareu el temps de vol d'aquest trajecte i el que trigaria quan el vent bufa a 100 km/h en la direcció perpendicular al trajecte AB . Feu el mateix càlcul quan la velocitat del vent és paral·lela al trajecte.

- 1.2 Demostreu que l'equació d'ona per a una funció escalar $\phi(t, \vec{x})$,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(t, \vec{x}) = \vec{\nabla}^2 \phi(t, \vec{x})$$

no és invariant sota una transformació de Galileu.

- 1.3 El parell de forces de l'equació (1.16) s'escriu $1/2 U_e (v/c)^2 \sin(2\theta)$ on U_e és l'energia electrostàtica de les dues càrregues oposades. Demostreu que per a un condensador l'efecte és el doble, és a dir no apareix el terme $1/2$ en la fórmula anterior.

Calculeu el parell de forces que actuaria sobre un condensador que està suspès formant un angle de 45° respecte al moment orbital de la Terra, $v \approx 30$ km/s. Amb unes plaques de 100 cm^2 separades 1 cm i carregades amb un potencial de 10 kV.

- 1.4 El període de la segona lluna de Júpiter, Europa, és de 3,55 dies. Quant val la discrepància màxima entre el període real i el temps observat des de la Terra entre dos eclipsis consecutius? Quin és el retard acumulat en el diàmetre de l'eclíptica, sense tenir en compte el moviment de Júpiter? La velocitat orbital de la Terra és de 30 km/s i el radi de l'òrbita és $1,49 \cdot 10^8$ km.

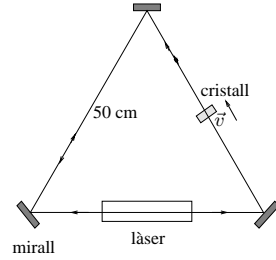
- 1.5 Una pluja cau verticalment a una velocitat de 10 m/s i nosaltres correm amb un paraigües a una velocitat de 5 m/s. Amb quin angle respecte a la vertical hem de col·locar el paraigües per no mullar-nos?

Des de la Terra observem una estrella que descriu una el·lipse de manera que el seu eix menor el veiem amb un angle de $36''$. Quin angle forma l'estrella amb l'eclíptica?

Si suposéssim que el moviment el·líptic anterior es deu al paral·laxi. A quina distància es trobaria l'estrella del Sol en anys llum?

- 1.6 Estudieu l'experiment de Fizeau per a l'aigua. Si tenim una longitud d'ona, $\lambda = 5700 \text{ Å}$, la longitud de cada tub és $= 6,15$ m, la velocitat del corrent d'aigua val $7,65$ m/s, i el desplaçament mitjà de les franges en invertir el flux és de $0,86 \pm 0,01$. Compareu el valor del coeficient d'arrossegament deduït dels valors anteriors amb el valor $1 - 1/n^2$ per a l'aigua, $n = 1,333$.

- 1.7 Per a una versió moderna de l'experiment de Fizeau es té un làser a un costat del triangle equilàter determinat pels miralls de la figura, també en un dels costats hi posem un cristall ($n = 1,5$) d'un gruix d'1 cm. El raig làser pot efectuar el camí tancat en qualsevol direcció. Si el cristall està en repòs ambdós camins coincideixen. Quina és la diferència de camins òptics si el cristall es mou a 1 cm/s ?



- 1.8 Feu el càlcul per a un experiment de Michelson quan els braços no són ni paral·lels ni perpendiculars al moviment respecte a l'èter, és a dir, per al cas més general per al qual el braç l_1 forma abans de girar 90° un angle θ amb la direcció de moviment relatiu de la Terra respecte a l'èter (suposeu que aquesta direcció és en el pla de l'interferòmetre). Demostreu que el desplaçament en nombre de franges ve donat per

$$\frac{l_1 + l_2}{\lambda} \beta^2 \cos 2\theta.$$