

9. MOVIMIENTO DE LA LUNA

9.1 Rotación de la Luna. Leyes de Cassini

Es un hecho de observación corriente que la Luna presenta siempre la misma cara hacia la Tierra; dicho de otra forma, vemos los accidentes de su superficie siempre aproximadamente en la misma posición sobre el disco. Interpretamos esta observación como una prueba de la rotación de la Luna alrededor de un eje que forma con el plano de su órbita un ángulo poco distinto de 90° , siendo la duración de la rotación igual a la de su revolución sideral alrededor de la Tierra. Las leyes por la que se rige esta rotación fueron enunciadas por J.D. Cassini en 1721 quien las dedujo de la observación. Posteriormente, Lagrange y Laplace las incorporaron a la Mecánica Celeste, admitiendo que la forma de la Luna es similar a la de un elipsoide de tres ejes cuyo eje mayor está constantemente dirigido hacia la Tierra, coincidiendo el eje menor con el de rotación de la Luna. De todos modos, por diferir muy poco entre sí las longitudes de los ejes de dicho elipsoide, en el estudio de las libraciones, si interesa, se puede considerar la Luna esférica.

Sea (Fig.1.9) N el nodo descendente del ecuador lunar sobre la eclíptica. Las leyes de Cassini pueden enunciarse de la siguiente forma:

1ª) El nodo N coincide sensiblemente con el nodo ascendente medio de la órbita lunar.

2ª) La inclinación I del ecuador lunar sobre la eclíptica es sensiblemente constante ($I = 1^\circ 32' 6''$). La inclinación media del ecuador lunar sobre la órbita es $i' + I = 6^\circ 41'$.

3ª) Si X es el punto hacia el cual va dirigido el eje mayor del elipsoide al que se asimila la Luna, la suma de los arcos γN y NX es aproximadamente igual a la longitud media de la Luna disminuida en 180° .

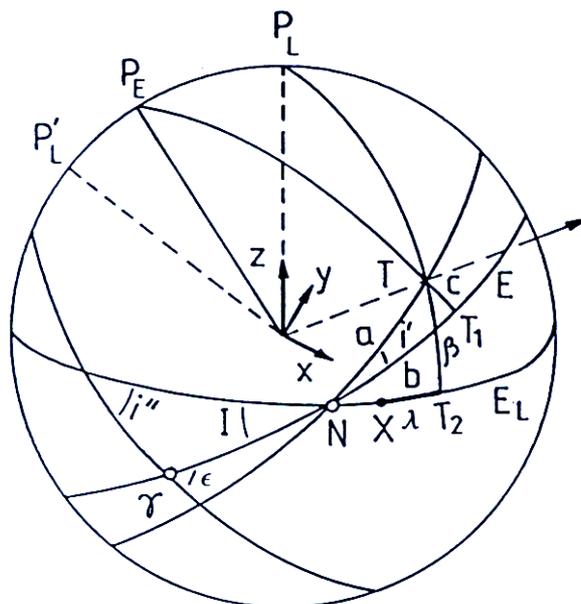


FIG. 1.9

9.1.1 Libraciones físicas

Las leyes de Cassini son aproximadas. La coincidencia de los nodos no es rigurosa, de modo que en N no tenemos un punto sino un pequeño triángulo; la inclinación I presenta fluctuaciones de amplitud muy pequeña, y la dirección del eje mayor puede separarse algunas centésimas de grado de la que hemos definido. Estas pequeñas desviaciones constituyen la *libración física* que se determina a partir de la teoría dinámica de la rotación de la Luna.

Sea (Fig. 2.9) x, y, z un sistema de coordenadas rectangulares selenocéntricas cuyos ejes coinciden con los ejes principales de inercia de la Luna y su origen con el centro de gravedad de la misma; el eje x orientado hacia la Tierra, el eje y perpendicular a él de modo que el sistema esté orientado en sentido directo y el eje z en la dirección del eje de giro de la Luna. Por otra parte, sean, con respecto a estos ejes, p, q, r los cosenos directores del eje de la eclíptica y λ, μ, ν los del radio vector Tierra-Luna. p, q, μ y ν son pequeños mientras que $r = \lambda \approx 1$.

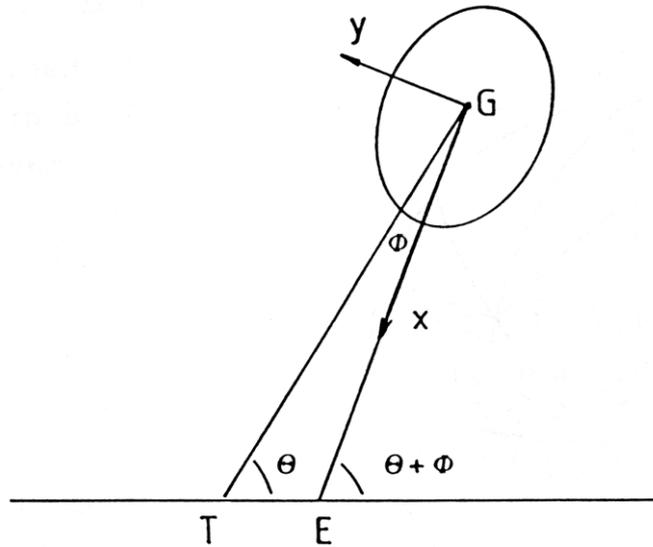


FIG. 2.9

Supongamos la Tierra esférica, de masa M y a una distancia R , constante, de la Luna y llamemos A, B y C a los momentos de inercia de la Luna con relación a los ejes coordenados. Sean $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ las componentes de la velocidad angular de la Luna en dicho sistema x, y, z . Las dos primeras son pequeñas y sus cuadrados y productos podrán despreciarse.

Recordemos la ecuación de Euler generalizada relativa al movimiento de un cuerpo en rotación (2.6):

$$I\dot{\omega} + \dot{\omega} \wedge I\dot{\omega} = \vec{N} \quad (1.9)$$

donde I es el tensor de inercia que en el caso que estamos considerando se escribe

$$I = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

y \vec{N} el momento de las fuerzas exteriores que supondremos limitadas a la de atracción de la Tierra,

$$\vec{N} = \frac{3GM}{R^5} \vec{R} \wedge I\vec{R} \quad (3.9)$$

Desarrollando (1.9) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= \frac{3GM}{R^3}(C-B)\mu\nu \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x &= \frac{3GM}{R^3}(A-C)\nu\lambda \\ C\dot{\omega}_z + (B-A)\omega_x\omega_y &= \frac{3GM}{R^3}(B-A)\lambda\mu \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

y despreciando cantidades pequeñas de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C-B)\omega_y\omega_z &= 0 \\ B\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x &= \frac{3GM}{R^3}(A-C)\nu \\ C\dot{\omega}_z &= \frac{3GM}{R^3}(B-A)\mu \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Consideremos la tercera ecuación de (5.9) que por contener solamente $\dot{\omega}_z$ puede ser estudiada independientemente de las otras. Supongamos (Fig. 2.9) que la dirección TG forma un ángulo θ con una dirección determinada y llamemos ϕ al ángulo TGE . ϕ nos da la medida de la *libración en longitud*. La dirección GE forma un ángulo $\theta + \phi$ con la dirección fija. Una rotación positiva alrededor del eje z , ω_z haría disminuir el ángulo $\theta + \phi$, por consiguiente:

$$\omega_z = -\frac{d}{dt}(\theta + \phi)$$

Ahora bien: $\mu = \cos \widehat{BGT} = \sin \phi \approx \phi$
por tanto, con mucha aproximación, resulta

$$\frac{d^2}{dt^2}(\theta + \phi) = -\frac{3GM}{R^3} \frac{B-A}{C} \phi \quad (6.9)$$

Supongamos en primer lugar el caso en que la órbita de la Luna es circular, es decir, $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. La expresión (6.9) describirá un movimiento armónico simple de la forma:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + w^2\phi = 0 \quad (7.9)$$

con

$$w^2 = \frac{3GM}{R^3} \frac{B-A}{C} \quad (8.9)$$

lo cual implica que sea $B > A$ y por consiguiente, si a , b y c son las longitudes interceptadas por la Luna sobre los ejes x , y y z respectivamente, que sea $a > b$. La solución de (7.9) es

$$\phi = \alpha \cos(wt + \beta) \quad (9.9)$$

donde α y β son constantes arbitrarias, amplitud y fase inicial del movimiento armónico que representa (9.9). Si esta oscilación pudiera ser observada, su periodo nos daría el valor de $\frac{B-A}{C}$; pero, es demasiado pequeña para ser detectada.

Consideremos ahora la órbita de la Luna no circular. Si la tercera ley de Cassini fuera exacta, sería:

$$\frac{d}{dt}(\theta + \phi) = n$$

con n constante; por tanto:

$$\theta + \phi = nt + \varepsilon \quad (10.9)$$

Si t se cuenta desde el perigeo, ε es una cantidad pequeña, del mismo orden de ϕ , y θ representa la anomalía verdadera. Suponiendo desviaciones periódicas de la ley de Cassini, pongamos:

$$\theta + \phi + \chi = nt + \varepsilon \quad (11.9)$$

y derivando dos veces respecto al tiempo, teniendo en cuenta (6.9) y (8.9), tendremos:

$$\ddot{\chi} = -w^2(\chi + \theta - nt - \varepsilon)$$

o también

$$\ddot{\chi} + w^2\chi = -w^2(\theta - nt - \varepsilon) \quad (12.9)$$

En esta ecuación $\theta - nt$ representa la ecuación del centro de una órbita kepleriana y por tanto se podría expresar por su correspondiente desarrollo en serie; pero, hemos de tener presente que la órbita de la Luna es una órbita perturbada y, por consiguiente, desarrollaremos el paréntesis del segundo miembro de (12.9) en una serie de la forma

$$\sum H \text{sen}(ht + h')$$

que incluirá la ecuación del centro y las desigualdades periódicas del movimiento de la Luna (despreciamos la aceleración secular).

Para resolver (12.9) empecemos por considerar la ecuación

$$\ddot{\chi} + w^2 \chi = -w^2 H \text{sen}(ht + h') \quad (13.9)$$

Supongamos una integral particular de la forma

$$\chi = \gamma \text{sen}(ht + h')$$

Derivando dos veces y sustituyendo deducimos el valor de γ

$$\gamma = \frac{-w^2 H}{w^2 - h^2}$$

Por otra parte, la solución de la ecuación sin segundo miembro es

$$\alpha \cos(wt + \beta) \quad (14.9)$$

Luego, la solución de (13.9) es

$$\chi = \alpha \cos(wt + \beta) + w^2 \frac{H}{h^2 - w^2} \text{sen}(ht + h')$$

y la integral general de la ecuación completa es:

$$\chi = \alpha \cos(wt + \beta) + w^2 \sum \frac{H}{h^2 - w^2} \text{sen}(ht + h') \quad (15.9)$$

Hemos dicho que la función complementaria (14.9) correspondiente a las oscilaciones libres es demasiado pequeña para ser observada. Los términos de la solución particular corresponden a las oscilaciones forzadas; para que dichas oscilaciones sean observables, en ellos debe ser o H grande o h pequeño.

En la teoría lunar los términos más importantes son el primer término del desarrollo de la ecuación del centro o *desigualdad elíptica*, para el cual

$$ht + h' = g \quad H = 22639."1 \quad h = 47033."97 \quad (16.9)$$

$$\frac{2\pi}{h} = 1 \text{ mes anomalístico}$$

y la *ecuación anual*, para la cual

$$ht + h' = \zeta \quad H = -668."9 \quad h = 3548."16 \quad (17.9)$$

$$\frac{2\pi}{h} = 1 \text{ año anomalístico}$$

donde g es la anomalía media de la Luna, ζ es la anomalía media del Sol y la unidad de tiempo es el día solar medio.

Sustituyendo los valores (16.9) y (17.9) en los correspondientes términos del segundo miembro de (15.9), observaremos que, puesto que w es muy pequeño, el segundo de ellos, esto es, la ecuación anual, proporciona la mayor oscilación forzada. Esta puede observarse, aunque no con mucha precisión, y puede establecerse el valor de $\frac{B-A}{C}$ a partir de las observaciones de su amplitud.

Trataremos ahora las dos primeras ecuaciones de (5.9) sin tener en cuenta ya la variación en ω_z .

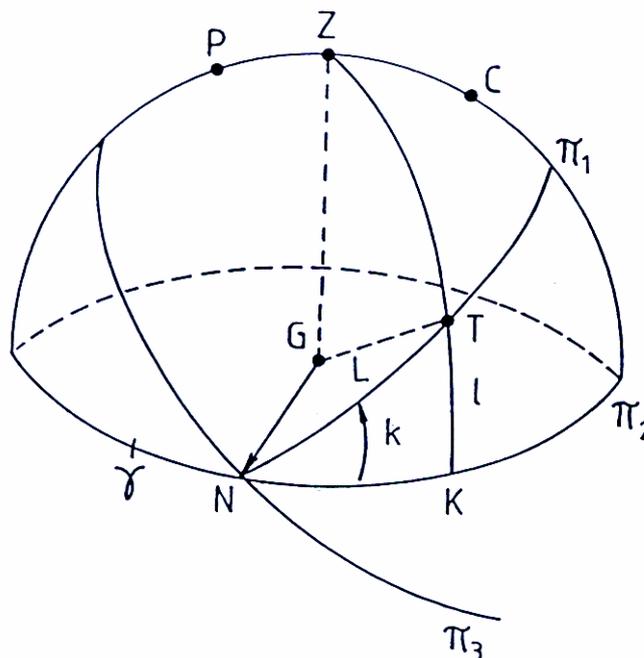


FIG. 3.9

Sea, en la Fig. 3.9, la línea $NTII_1$ la órbita de la Tierra alrededor de la Luna en la esfera celeste centrada en la Luna y N su nodo ascendente con respecto a un plano Π_2 paralelo a la eclíptica por el centro de la Luna. El círculo máximo que pasa por Z (polo de Π_2) y T corta a Π_2 en K . El arco $KT = l$ es la latitud selenocéntrica de la Tierra. Despreciando la precesión podemos escribir

$$\Upsilon N = -gt + \text{conste}$$

donde g es la velocidad de retrogradación de los nodos.

Sea k la inclinación de la órbita de la Tierra con relación a Π_2 la proyección de la retrogradación de N sobre la órbita de la Tierra durante un tiempo t será un arco $gt \cos k$, pero por ser k muy pequeño, podemos suponer que dicho arco es gt . Por tanto, suponiendo que la Tierra se mueve en una órbita circular con movimiento angular n , podremos escribir

$$NT = L = nt + gt + c \quad (c = \text{cte})$$

y

$$\cos ZT = p\lambda + q\mu + rv \approx p + v$$

y también

$$\cos ZT = \text{sen } l = \text{sen } k \text{ sen } L \approx k \text{ sen } L$$

Por consiguiente:

$$v = k \text{ sen } L - p = k \text{ sen}(nt + gt + c) - p \quad (18.9)$$

Sean, en la misma [figura 3.9](#), P el polo de Π_1 y C el polo de Π_3 (plano del ecuador de la Luna). La condición para que P , Z y C estén en un mismo círculo máximo como se requiere en virtud de la tercera ley de Cassini es

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = 0$$

donde \vec{C} es el vector director de GC y \vec{N} es el vector director de la línea de los nodos, ya que, en efecto, si N es el polo del círculo máximo que pasa por P y Z , y C ha de estar en este mismo círculo, los vectores \vec{C} y \vec{N} han de ser perpendiculares.

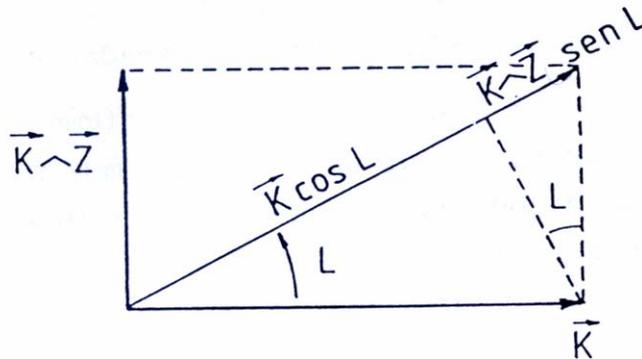


FIG. 4.9

Podemos calcular \vec{N} a partir de \vec{K} y $\vec{K} \wedge \vec{Z}$ indicando por \vec{K} y \vec{Z} los vectores directores de GK y GZ respectivamente, suponiendo $k \approx 0$ ([Fig. 4.9](#))

$$\vec{N} = \vec{K} \cos L + \vec{K} \wedge \vec{Z} \text{ sen } L$$

Ahora bien, si designamos por \vec{T} el vector de posición selenocéntrico de la Tierra, es:

$$\vec{K} = \frac{\vec{Z} \wedge (\vec{Z} \wedge \vec{T})}{\text{sen } ZT}$$

y recordando la propiedad del triple producto vectorial $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ y tomando $\text{sen} ZT = 1$ es:

$$\vec{K} \approx \vec{Z} \cos ZT - \vec{T}$$

Por consiguiente:

$$\vec{N} = (\vec{Z} \cos ZT - \vec{T}) \cos L + \vec{Z} \wedge \vec{T} \text{sen } L$$

es decir, desarrollando:

$$\vec{N} = \begin{bmatrix} (p \cos ZT - \lambda) \cos L + (qv - r\mu) \text{sen } L \\ (q \cos ZT - \mu) \cos L + (r\lambda - p\nu) \text{sen } L \\ (r \cos ZT - \nu) \cos L + (p\mu - q\lambda) \text{sen } L \end{bmatrix}$$

y multiplicando escalarmente por $\vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} \vec{C} \cdot \vec{N} &= (r \cos ZT - \nu) \cos L + (p\mu - q\lambda) \text{sen } L \approx \\ &\approx (\cos ZT - \nu) \cos L - q \text{sen } L \\ &\quad (r \approx 1, \lambda \approx 1, p\mu \approx 0) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\cos ZT = p + \nu$, también

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = p \cos L - q \text{sen } L \quad (19.9)$$

Sea por otra parte, con respecto a los ejes móviles x, y, z ([Fig. 2.9](#)):

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{Z} = \vec{0} \quad (20.9)$$

puesto que en virtud de la segunda ley \vec{Z} es fijo en el espacio.

Desarrollando ([20.9](#)), tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} - \omega_z q + \omega_y r &= 0 \\ \dot{q} - \omega_x r + \omega_z p &= 0 \\ \dot{r} - \omega_y p + \omega_x q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.9)$$

o también, dentro de la aproximación en que nos movemos (tomamos $\omega_z = n$):

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} - nq + \omega_y r &= 0 \\ \dot{q} - \omega_x r + np &= 0 \\ \dot{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (22.9)$$

Derivando las dos primeras respecto al tiempo y teniendo en cuenta la tercera obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_y &= -\ddot{p} + n\dot{q} \\ \dot{\omega}_x &= \ddot{q} + n\dot{p} \end{aligned} \right\} \quad (23.9)$$

y sustituyendo en las dos primeras ecuaciones de (5.9), dividiendo por A la primera y por B la segunda, tomando $r = l$ y recordando (18.9) tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + n\dot{p} + \frac{C-B}{A}n(nq - \dot{p}) &= 0 \\ -\ddot{p} + n\dot{q} + \frac{A-C}{B}n(\dot{q} + np) &= \frac{3GM}{R^3} \frac{A-C}{B} (k \operatorname{sen} L - p) \end{aligned} \right\} \quad (24.9)$$

Haciendo para simplificar

$$\frac{C-B}{A} = \sigma \quad y \quad \frac{C-A}{B} = \tau$$

teniendo además en cuenta que $MG/R^3 = n^2$, las ecuaciones (24.9) se escribirán:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} + n\dot{p}(1 - \sigma) + n^2\sigma q &= 0 \\ -\ddot{p} + n\dot{q}(1 - \tau) - 4n^2\tau p &= -3n^2\tau k \operatorname{sen} L \end{aligned} \right\} \quad (25.9)$$

La solución de estas ecuaciones constará de una función complementaria, que representará las oscilaciones libres y una integral particular procedente del término en $\operatorname{sen} L$, que dará las oscilaciones forzadas.

Las oscilaciones libres han de ser estables. Hallaremos las condiciones para que así sea:

Supongamos que

$$p = Fe^{st} \quad y \quad q = Ge^{st}$$

son soluciones de las ecuaciones (25.9) sin segundos miembros. La ecuación característica del sistema es:

$$s^4 + s^2n^2(1 + 3\tau + \sigma\tau) + 4n^4\sigma\tau = 0 \quad (26.9)$$

Para que las oscilaciones sean estables, las dos raíces de esta ecuación, considerada como de segundo grado en s^2 , deben ser reales y negativas. La condición para que sean reales es

$$(1+3\tau+\sigma\tau)^2 - 16\sigma\tau > 0$$

y las condiciones para que sean negativas:

$$\begin{aligned} -n^2(1+3\tau+\sigma\tau) &< 0 \\ \sigma\tau &> 0 \end{aligned}$$

La tercera es equivalente a decir que $(C - A)(C - B) > 0$ o lo que es lo mismo que si $C > B$ es $C > A$ y si $C < B$ es $C < A$.

Tanto en un caso como en otro se cumplen las otras dos. Por consiguiente el eje c en la dirección de GZ es a la vez mayor o menor que los otros dos. Es decir, el eje de rotación de la Luna o es el más largo o es el más corto de los ejes de la Luna.

Consideremos ahora las oscilaciones forzadas. Ensayemos una solución de la forma

$$\left. \begin{aligned} p &= P \operatorname{sen} L \\ q &= Q \operatorname{cos} L \end{aligned} \right\} \quad (27.9)$$

Sustituyendo en (25.9) con segundos miembros, recordando que $L = nt + gt + c$, resulta:

$$\left. \begin{aligned} Q \left[-(n+g)^2 + n^2\sigma \right] + Pn(n+g)(1-\sigma) &= 0 \\ P \left[(n+g)^2 - 4n^2\tau \right] - Qn(n+g)(1-\tau) &= -3n^2\tau k \end{aligned} \right\} \quad (28.9)$$

ecuaciones que resueltas, eliminando los productos de pequeñas cantidades dan:

$$\frac{Q}{P} = 1 - \frac{g}{n} \quad (29.9)$$

$$P = \frac{3n\tau k}{3n\tau - 2g} \quad (30.9)$$

De (19.9) y (28.9) resulta:

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = (P - Q) \operatorname{sen} L \operatorname{cos} L$$

y de (29.9)

$$P - Q = \frac{Pg}{n}$$

luego:

$$\vec{C} \cdot \vec{N} = \frac{Pg}{2n} \text{sen } 2L \quad (31.9)$$

lo cual nos dice que hay una oscilación de pequeña amplitud alrededor de cero. A parte de esta oscilación, $\vec{C} \cdot \vec{N}$ es nulo y P , Z y C están en el mismo círculo máximo, propiedad que confirma la primera ley de Cassini. Se deduce lo mismo si las funciones complementarias se incluyen en la evaluación de $\vec{C} \cdot \vec{N}$.

Hemos de ver ahora cual es la condición para que Z esté entre P y C ; pero, antes, calculemos el valor del arco \widehat{CZ} . Teniendo en cuenta que

$$\cos CZ = 0 \cdot p + 0 \cdot q + 1 \cdot r = r$$

elevando al cuadrado

$$\cos^2 CZ = r^2 = 1 - (p^2 + q^2)$$

de donde

$$p^2 + q^2 = 1 - \cos^2 CZ = \text{sen}^2 CZ \approx \widehat{CZ}^2$$

y por tanto, teniendo en cuenta (28.9) y (29.9) :

$$\widehat{CZ}^2 = P^2 \text{sen}^2 L + Q^2 \cos^2 L = P^2 \left(1 - \frac{g}{n} - \frac{g}{n} \cos 2L \right) \quad (32.9)$$

Luego, a parte de una pequeña oscilación, de periodo medio mes nodal, \widehat{CZ} es constante, lo que prueba la segunda ley de Cassini. Esta pequeña variación en la inclinación del plano del ecuador lunar sobre la eclíptica da lugar a la llamada *libración física en latitud*. Los valores de la libración física oscilan entre -0.02 y $+0.02$.

Supongamos ahora que $L = 90^\circ$ ([Fig. 3.9](#)). La Tierra T se hallará en el círculo máximo PZC y tendremos:

$$\widehat{TP} > \widehat{TZ}$$

Si el eje x corta a la esfera celeste en el punto A , este punto estará muy cerca del círculo máximo $PZCE$ y puesto que $CA = 90^\circ$, para que Z esté entre P y C deberá ser $AZ > 90^\circ$. Por tanto,

$$\cos AZ = p = P \text{sen } 90^\circ < 0$$

luego,

$$P = \frac{k\tau}{\tau - \frac{2g}{3n}} < 0 \quad (33.9)$$

y como que $\tau < \frac{2g}{3n}$ para que se verifique (33.9) ha de ser $\tau > 0$, lo cual implica que sea $C-A > 0$ o $c < a$.

Nos había quedado la duda de si el eje de rotación era el más largo o el más corto de la Luna. De lo que acabamos de decir se desprende que

$$a > b > c$$

por consiguiente vemos que c es el menor de los tres ejes.

Aproximando el valor de CZ dado por (32.9) podemos escribir

$$\widehat{CZ} = |P| = \left| \frac{3k\tau}{3\tau - 2\frac{g}{n}} \right| \quad (34.9)$$

de donde sustituyendo los valores observados $\widehat{CZ} = 91.'4$, $k = 308.'7$ y $g/n=0.00402$, hallamos $\tau = 0.00061$.

9.1.2 Libraciones ópticas

La observación telescópica de la Luna nos dice que los detalles de su superficie no ocupan posiciones rigurosamente invariables sobre el disco, sino que experimentan desplazamientos de cierta amplitud alrededor de una posición media. Damos a dichos desplazamientos el nombre de *libración óptica*.

Partamos del sistema de coordenadas x, y, z que hemos definido en el apartado anterior al cual referiremos los puntos de la superficie lunar, así como las direcciones selenocéntricas de la Tierra y del Sol. La longitud selenográfica o selenocéntrica se mide sobre el ecuador lunar, en sentido directo, a partir del punto X (Fig. 1.9); la latitud selenográfica o selenocéntrica se mide a partir del ecuador, positivamente hacia el norte. La posición del punto X está definida por la tercera ley de Cassini:

$$NX = L_m - \Omega - 180^\circ$$

siendo L_m la longitud media de la Luna y Ω el argumento del nodo.

En la Fig. 1.9, T representa la posición selenocéntrica de la Tierra en la esfera celeste. Sus coordenadas eclípticas son:

$$\left. \begin{aligned} \Upsilon T_1 &= L - 180^\circ \\ T_1 T &= -B \end{aligned} \right\} \quad (35.9)$$

donde L y B son las coordenadas eclípticas longitud y latitud de la Luna. Este punto T tiene las mismas coordenadas selenográficas λ y β que el punto de la superficie de la Luna que un observador geocéntrico ve en el centro del disco lunar. Es decir

$$\left. \begin{aligned} XT_2 &= \lambda \\ T_2T &= \beta \end{aligned} \right\} \quad (36.9)$$

λ recibe el nombre de *libración en longitud* y β el de *libración en latitud*. La composición de estas dos libraciones da lugar a la llamada *libración óptica*.

Para calcular la libración óptica consideremos el triángulo NTT_1 (Fig. 1.9) en el que

$$\left. \begin{aligned} NT &= a, & NT_1 &= b = L - \Omega - 180^\circ \\ T_1T &= c = -B, & i' &= J \end{aligned} \right\} \quad (37.9)$$

Si incrementamos el ángulo J en $\delta J = I$ y suponemos que el triángulo sigue siendo rectángulo tendremos:

$$\lambda = XT_2 = NT_1 - NX + \delta b$$

es decir

$$\lambda = L - \Omega - 180^\circ - (L_m - \Omega - 180^\circ) + \delta b$$

y

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= L - L_m + \delta b \\ \beta &= -B + \delta c \end{aligned} \right\} \quad (38.9)$$

Pero, del mismo triángulo NTT_1 deducimos:

$$\left. \begin{aligned} \tan b &= \tan a \cos J \\ \sen c &= \sen a \sen J \\ \cos a &= \cos b \cos c \end{aligned} \right\}$$

de donde, diferenciando las dos primeras y operando teniendo en cuenta la tercera, resulta:

$$\left. \begin{aligned} \delta b &= -\tan c \cos b \delta J \\ \delta c &= \sen b \delta J \end{aligned} \right\} \quad (39.9)$$

Sustituyendo en (38.9) y recordando (37.9) obtenemos:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= L - L_m - I \cos(L - \Omega) \tan B \\ \beta &= -B - I \sen(L - \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (40.9)$$

La libración en longitud puede alcanzar un valor de hasta 8° en valor absoluto y la libración en latitud hasta unos 7° .

Para obtener la libración completa sumaremos a estas cantidades las correspondientes a la libración física.

El último término de la expresión que nos da λ es de segundo orden con relación a las inclinaciones I e i' ; en consecuencia, la libración en longitud difiere poco de las desigualdades de la longitud de la Luna $L - L_m$, cuya parte principal está constituida por la ecuación del centro de periodo la *revolución anomalística* de la Luna como veremos más adelante.

La parte principal de la libración en latitud es $-(i' - I)\sin(L - \Omega)$ cuyo periodo es la *revolución draconítica*. ([Cap. 10](#)).

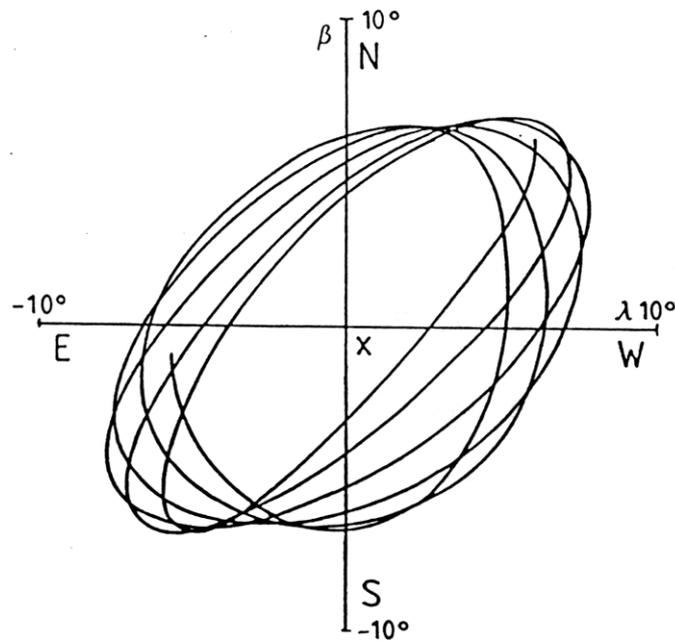


FIG. 5.9

Las dos componentes de la libración óptica tienen periodos distintos lo cual hace que el punto T ([Fig. 1.9](#)) describa una curva no cerrada de aspecto parecido al de la [Fig. 5.9](#) que nos permite conocer por una parte el desplazamiento sobre la Luna del punto que, para un observador geocéntrico, se proyecta en el centro del disco y por otra, la órbita selenocéntrica del centro de la Tierra referida al sistema de referencia x, y, z .

Un dato a tener en cuenta en el cálculo de las libraciones es el valor del ángulo de posición del eje de rotación de la Luna (ángulo $C = PTR$ en la [Fig. 6.9](#))

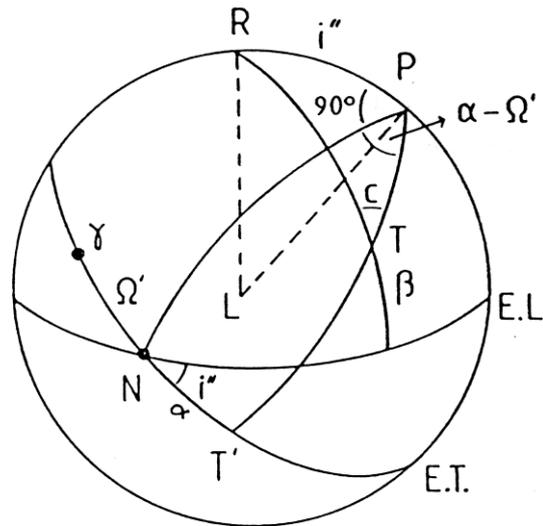


FIG. 6.9

Aplicando el teorema de los senos al triángulo Polo-Polo de la Luna-Tierra en el cual es $RP = i''$, $RTP = C$, $RT = 90^\circ - \beta$, $RPT = 90^\circ + (\alpha - \Omega')$ obtenemos:

$$\text{sen } C = -\frac{\text{sen } i'' \cos(\alpha - \Omega')}{\cos \beta} \quad (41.9)$$

9.1.3 Libración diurna

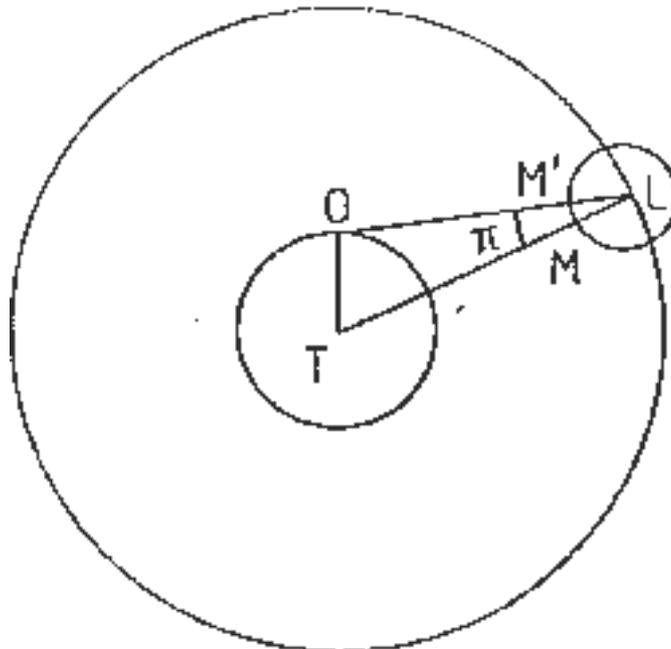


FIG. 7.9

Recibe el nombre de *libración diurna* el efecto de paralaje debido a que el observador ocupa una posición topocéntrica y, por tanto, el punto que para dicho observador se proyecta en el centro del disco lunar no coincide con el $T(\lambda, \beta)$.

Las rectas que unen el centro de la Luna L con el centro de la Tierra T y con el observador O forman un ángulo igual a la paralaje de la Luna ($\pi \approx 1^\circ$) (Fig. 7.9). Un detalle del disco lunar que desde T se vería en M desde O se ve en M' . Así pues, la libración diurna puede alcanzar el valor de aproximadamente 1° .

La suma de las distintas libraciones alcanza $\pm 9^\circ$ en longitud y $\pm 8^\circ$ en latitud, gracias a lo cual podemos ver desde la Tierra 3/5 partes del hemisferio oculto de la Luna.

El cálculo de la libración diurna se reduce al de la paralaje en coordenadas ecuatoriales. Sean $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ la libración diurna en longitud y en latitud y $\Delta\alpha$ y $\Delta\delta$ la paralaje diurna de la Luna en ascensión recta y en declinación. Con respecto al punto T de la Fig. 1.9 el punto que representa la dirección selenocéntrica del observador tiene las siguientes coordenadas diferenciales:

$$\begin{array}{ll} \text{selenocéntricas:} & \Delta\lambda \cos \beta, \Delta\beta \\ \text{ecuatoriales:} & \Delta\alpha \cos \delta, -\Delta\delta \end{array} \quad (42.9)$$

Para pasar de un sistema de coordenadas al otro efectuaremos un giro de ángulo C alrededor del tercer eje puesto que éste es el valor del ángulo que forman los planos del ecuador de la Tierra y del de la Luna respectivamente (Fig. 6.9). Tendremos, pues:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \cos \beta \\ \Delta\beta \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos C & \text{sen } C & 0 \\ -\text{sen } C & \cos C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \cos \delta \\ -\Delta\delta \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \Delta\alpha \cos \delta \cos C - \Delta\delta \text{sen } C \\ -\Delta\alpha \cos \delta \text{sen } C - \Delta\delta \cos C \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (43.9)$$

de donde:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\lambda \cos \beta = \Delta\alpha \cos \delta \cos C - \Delta\delta \text{sen } C \\ \Delta\beta = -\Delta\alpha \cos \delta \text{sen } C - \Delta\delta \cos C \end{array} \right\} \quad (44.9)$$

La libración total se obtendrá sumando $\Delta\lambda$ y $\Delta\beta$ deducidas de (44.9) a λ y β respectivamente. El valor topocéntrico del ángulo C se obtendrá sustituyendo los valores topocéntricos de la ascensión recta α y la declinación δ de la Luna, en lugar de los geocéntricos, en la fórmula (41.9).