2. LA TIERRA

2.1 Elipsoide terrestre

Debido a las irregularidades que presenta la superficie física de la Tierra, se hace necesario asimilarla a una cierta superficie más o menos ideal que reproduzca ciertas magnitudes físicas; es lo que corrientemente denominamos un "modelo".

A. – *Modelo geométrico*

Desde un punto de vista geométrico, la Tierra puede considerarse, en primera aproximación, como una esfera de radio 6.371 km y, en segunda aproximación, como un elipsoide de revolución. La esfera y el elipsoide son equivalentes, tanto en área como en volumen, y el radio de la esfera, llamado *radio medio de la Tierra*, es la media aritmética de los tres semiejes del elipsoide (aproximada al km).

Los elementos del elipsoide de revolución que fue adoptado como "elipsoide internacional" por la Asamblea General de la Unión Geodésica y Geofísica Internacional (U.G.G.I.), celebrada en Madrid en 1924, son:

$$\textit{radio ecuatorial}: \; a = 6.378,388 \text{ km}$$

$$\textit{achatamiento}: \; f = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{297}$$

de los que se deduce:

$$\textit{radio polar}: \; c = 6.356,912 \text{ km}$$

Como consecuencia de los resultados obtenidos mediante la observación de satélites artificiales, en la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional (U.A.I.), celebrada en Hamburgo en 1964, se recomendó trabajar con los siguientes elementos:

$$a = 6.378,160 \text{ km}$$

$$f = \frac{1}{298,25}$$

Ultimamente, en la Asamblea General de la Unión Astronómica Internacional que se celebró en Grenoble en 1976, se adoptó un nuevo sistema de constantes astronómicas, designado por IAU (1976), que entró en vigor el 1 de enero de 1984. En él se toma:

$$a = 6.378,140 \text{ km}$$

$$f = \frac{1}{298,257}$$

B.- Modelo dinámico

El potencial creado por la Tierra no es de revolución. Ello se intenta explicar considerando que la Tierra, desde un punto de vista dinámico, se aproxima mediante un elipsoide de tres ejes cuyos elementos son:

$$a = 6.378{,}2\ \text{km}$$
$$f = \frac{a-c}{a} = \frac{1}{298{,}3}$$
$$f_e = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{30.000}$$

donde f y f_e son el *achatamiento polar* y el *achatamiento ecuatorial*, respectivamente.

Desde 1958, por observación de las anomalías orbitales del satélite artificial Vanguard 1958 β_2, se sabe que, en cuanto se refiere a la distribución de masas, la Tierra tiene *forma de pera*. En la figura 1.2 la comparamos con el elipsoide.

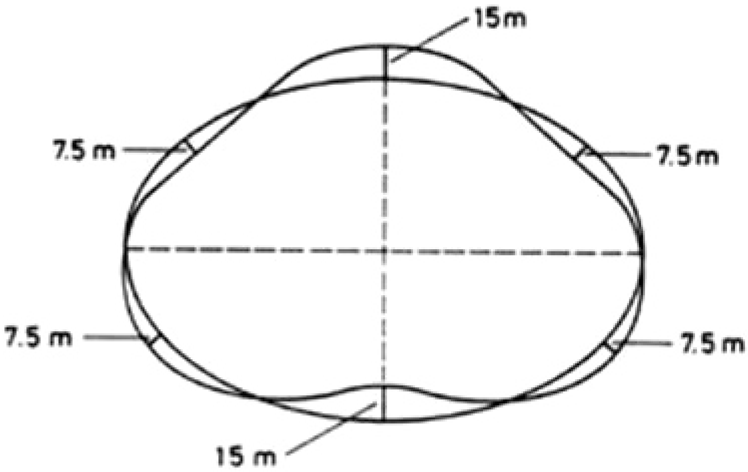

FIG 1.2

El elipsoide de revolución es una sencilla figura geométrica de referencia, pero que se aparta algo de la forma real de la Tierra. Por eso se define el *geoide relativo a un punto* como la superficie ortogonal en cada punto a la dirección de la gravedad. Difiere en ±100 m del elipsoide de referencia. La figura teórica que se obtiene es una superficie que, coincidiendo con la superficie media de los mares (hecha abstracción de mareas y corrientes), se prolonga hipotéticamente por debajo de los continentes. Para ajustar el geoide real al teórico se ha de efectuar una compensación de masas.

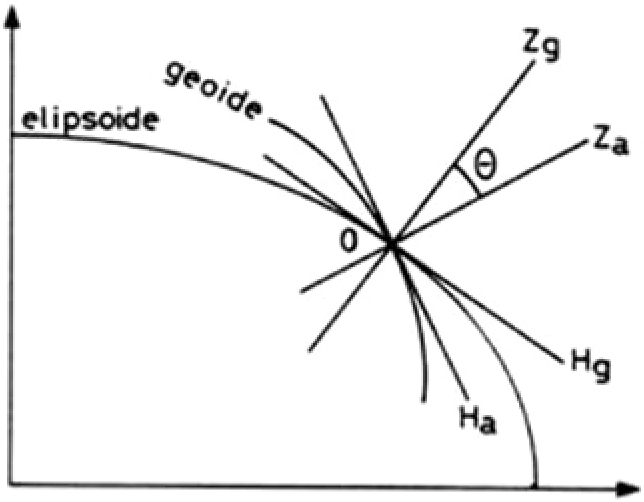

FIG 2.2

Consideremos el elipsoide como figura de referencia y un observador *O* situado sobre dicho elipsoide. Para este observador *O*, llamaremos (Fig. 2.2):

Vertical geodésica, Z_g, a la dirección normal al elipsoide en *O*.

Horizonte geodésico, H_g, al plano tangente al elipsoide en *O*.

Vertical astronómica, Z_a, a la dirección normal al geoide que pasa por *O* (la dirección de la plomada).

Horizonte astronómico, H_a, al plano tangente al geoide en *O*.

Desviación de la vertical, θ, al ángulo que forman las verticales geodésica y astronómica. Su valor varia desde fracciones de segundo a un minuto de arco, lo que provoca errores de medida desde decenas de metros a 2 km.

La Tierra gira alrededor de un eje de rotación instantánea, o eje del mundo, que no coincide ni con el eje de figura del elipsoide ni con el tercer eje del elipsoide central de inercia. Sean (Fig. 3.2): O el centro del elipsoide, T el centro de gravedad de la Tierra, i el *eje instantáneo* de rotación, e el *eje de figura* del elipsoide y e' el *tercer eje del elipsoide central de inercia*. Se definen los siguientes elementos:

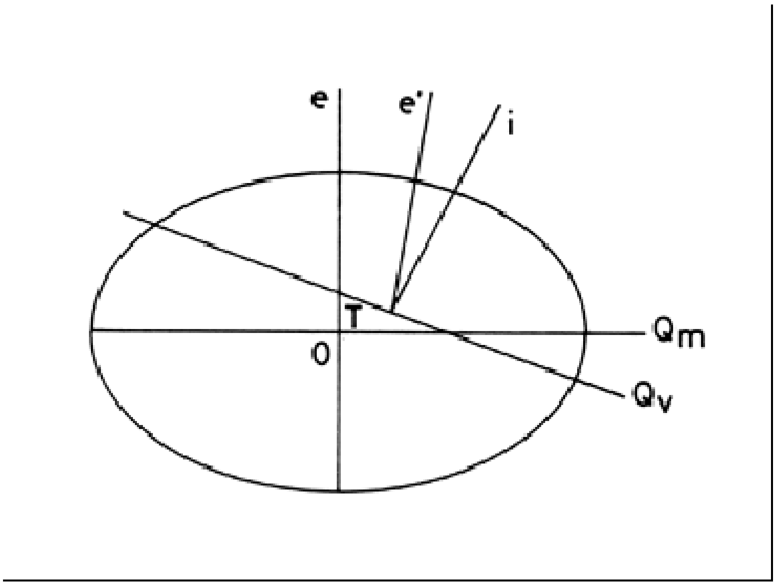

FIG 3.2

Ecuador instantáneo, Q_v, plano que pasa por el centro de gravedad de la Tierra y es ortogonal al eje instantáneo.

Ecuador medio, Q_m, plano que pasa por el centro del elipsoide y es ortogonal al eje de figura.

Latitud astronómica, ángulo que forma la vertical astronómica con el ecuador instantáneo.

Latitud geodésica, ángulo que forma la vertical geodésica con el ecuador medio.

En lo que sigue se considerará que el centro del elipsoide coincide con el centro de gravedad de la Tierra (O=T) y que el eje de figura coincide con el tercer eje del elipsoide central de inercia (e=e'). Esto equivale a despreciar los desplazamientos de T y de e', debido a movimientos de masas interiores, y a considerar un eje y un ecuador medios que contienen los tres ejes del elipsoide central de inercia.

2.1.1 Posición sobre la superficie de la Tierra

Entre los diversos autores, no hay un criterio unánime para definir las coordenadas geográficas. Unos consideran como geográficas las astronómicas medias mientras que otros toman como geográficas las geodésicas. Así lo haremos nosotros, llamando *coordenadas geográficas* a las geodésicas, considerando los meridianos y los paralelos sobre un elipsoide de revolución cuyos ejes mayores estén situados en el ecuador medio y cuyo eje menor sea el eje polar medio. La *longitud geográfica* ya ha sido definida en el apartado 1.7.1.

Para fijar la posición de un lugar O situado sobre la superficie de la Tierra, es necesario conocer sus coordenadas rectangulares o polares con respecto a la elipse sección del elipsoide por el meridiano del lugar. Representemos, pues, la sección meridiana del elipsoide terrestre junto con su circunferencia principal (Fig. 4.2).

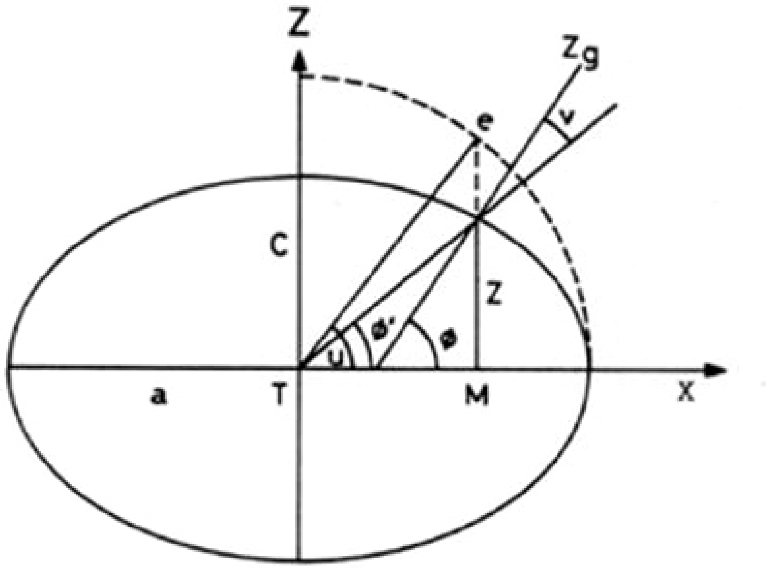

FIG 4.2

Sean *T* el centro de la Tierra, *a* el radio ecuatorial y *c* el radio polar. Consideremos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en *T* y ejes *X* sobre *a* y *Z* sobre *c*. Sea, además, *O* un punto cualquiera del elipsoide. Si trazamos la vertical geodésica Z_g (ortogonal al elipsoide) en *O*, ϕ representará la *latitud geográfica*. Asimismo, ϕ', ángulo del vector de posición de *O* con el eje *X*, se denomina *latitud geocéntrica* de *O*. La diferencia:

$$v = \phi - \phi'$$

se llama *ángulo de la vertical* y, como se demostrará, es siempre v<12'.

Sea *Q* la intersección de la ordenada por *O* con el círculo principal. El ángulo u que forma *TQ* con el eje *X* se denomina *latitud reducida*.

Se trata de hallar las coordenadas cartesianas (*x*,*z*) y las coordenadas polares (a, ρ, ϕ') del punto *O*, siendo $a\rho$ el radio vector *TO* del punto *O* medido en unidades del semieje mayor ($\rho \leq 1$), y, posteriormente, relacionarlas con ϕ.

Recordando que la elipse y su circunferencia principal son afines, según una afinidad ortogonal de eje el mayor de la elipse y razón *c/a*, podemos escribir:

$$\frac{z}{\overline{\overline{MQ}}} = \frac{c}{a}$$

y teniendo en cuenta que:

$$\overline{MQ} = \overline{TQ} \operatorname{sen} u$$

obtendremos:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos u \\ z &= c\,\mathrm{sen}\,u \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Como, además:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\rho\cos\phi' \\ z &= a\rho\,\mathrm{sen}\,\phi' \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

de (1.2) y (2.2), dividiendo ordenadamente z entre x e identificando los coeficientes:

$$\tan\phi' = c/a\tan u \qquad (3.2)$$

Por otra parte, recordando la pendiente de la normal a una curva, según (1.2), por definición de latitud geográfica:

$$\tan\phi = -\frac{dx}{dz} = -\frac{-a\,\mathrm{sen}\,u}{c\cos u}\frac{du}{du} = a/c\tan u \qquad (4.2)$$

Comparando con la anterior igualdad (3.2), obtenemos ϕ' en función de ϕ:

$$\tan\phi' = c^2/a^2\tan\phi = (1-f)^2\tan\phi = (1-e^2)\tan\phi \qquad (5.2)$$

según se sigue de las definiciones de achatamiento, f, y de excentricidad, e.

Si hacemos:

$$\left.\begin{aligned} x &= aC(\phi)\cos\phi \\ z &= aS(\phi)\,\mathrm{sen}\,\phi \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

donde C(ϕ) y S(ϕ) son ciertas funciones de ϕ y calculamos dichas funciones a partir de (1.2) y (6.2), tendremos:

$$C(\phi) = \frac{\cos u}{\cos\phi} = \frac{(1+\tan^2 u)^{-\frac{1}{2}}}{\cos\phi}$$

y, según (4.2):

$$C(\phi) = \frac{(1+(1-f)^2\tan^2\phi)^{-\frac{1}{2}}}{\cos\phi} = \frac{1}{(\cos^2\phi + (1-f)^2\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}}$$

y operando:

$$C(\phi) = \frac{1}{(1-(2f-f^2)\sin^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \qquad (7.2)$$

Efectuando los cocientes z/x en (1.2) y (6.2) e identificando, se deduce:

$$c/a \tan u = \frac{S(\phi)}{C(\phi)} \tan\phi$$

y, según (4.2):

$$S(\phi) = (c/a)^2 C(\phi) = (1-f)^2 C(\phi) \qquad (8.2)$$

es decir, $S(\phi)$ y $C(\phi)$ son proporcionales. Las fórmulas (6.2), (7.2) y (8.2) permiten hallar las coordenadas cartesianas de $O(x,z)$ en función de ϕ.

Para hallar el radio vector de O en función de ϕ, sumemos los cuadrados de x y z en (2.2) y (6.2) e identifiquémoslos:

$$\rho^2 = C^2 \cos^2\phi + S^2 \operatorname{sen}^2\phi$$

y, teniendo en cuenta (8.2):

$$\rho^2 = C^2(\cos^2\phi + (1-f)^4 \operatorname{sen}^2\phi)$$

de donde, finalmente:

$$\rho = C(\cos^2\phi + (1-f)^4 \operatorname{sen}^2\phi)^{1/2} \qquad (9.2)$$

Para hallar el ángulo de la vertical en función de O escribiremos:

$$\tan v = \tan(\phi - \phi') = \frac{\tan\phi - \tan\phi'}{1+\tan\phi\tan\phi'}$$

y según (5.2):

$$\tan v = \frac{\tan\phi - (1-e^2)\tan\phi}{1+(1-e^2)\tan^2\phi} = \frac{e^2 \operatorname{sen}\phi\cos\phi}{1-e^2\operatorname{sen}^2\phi}$$

y teniendo en cuenta que $2\operatorname{sen}\phi\cos\phi = \operatorname{sen} 2\phi$ y que $\operatorname{sen}^2\phi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)$, será:

$$\tan v = \frac{1/2 e^2 \sin 2\phi}{1-e^2/2(1-\cos 2\phi)} = \frac{e^2 \sin 2\phi}{2-e^2+e^2\cos 2\phi}$$

y haciendo

$$m = \frac{e^2}{2-e^2}$$

queda finalmente:

$$\tan v = \frac{m \sin 2\phi}{1+m\cos 2\phi} \qquad (10.2)$$

Para hallar el valor máximo de v expresaremos su tangente en función del ángulo auxiliar u; por (4.2) y (3.2) tendremos:

$$\tan v = \frac{\tan\phi - \tan\phi'}{1+\tan\phi\tan\phi'} = \frac{(a/c - c/a)\tan u}{1+\tan^2 u} = \frac{1}{2}(a/c - c/a)\,\mathrm{sen}\,2u$$

v será máximo cuando lo sea $\mathrm{sen}\,2u$, es decir, cuando u= π /4. En tales circunstancias $\tan u = 1$, y (3.2) y (4.2) se reducen a:

$$\tan\phi'_M = c/a \qquad (11.2)$$

$$\tan\phi_M = a/c \qquad (12.2)$$

de donde:

$$\tan\phi'_M \tan\phi_M = 1$$

lo que implica

$$\phi'_M + \phi_M = \frac{\pi}{2}$$

Recordando que *c/a* =1-*f* y sustituyendo *f* por su valor en (11.2) y en (12.2), resulta:

$$\phi_M = 45^{\circ}5'48''$$
$$\phi'_M = 44^{\circ}54'12''$$

y finalmente:

$$v = \phi_M - \phi'_M = 11'36''$$

2.1.2 Corrección de coordenadas por altitud

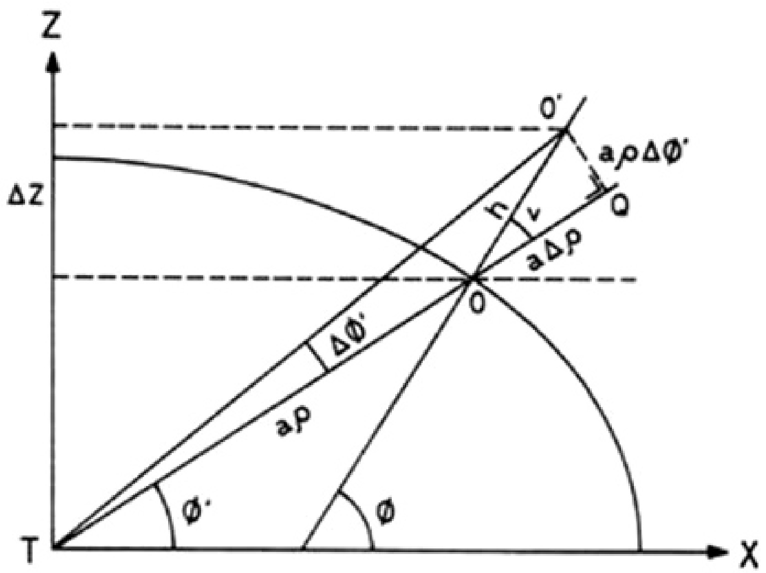

FIG 5.2

Si el observador se encuentra sobre un punto O' situado a una altitud h sobre el elipsoide de referencia, veamos cuales serán las correcciones , Δx, Δz, $\Delta\rho$, $\Delta\phi'$ que aplicadas a las coordenadas de O nos darán las coordenadas de O' (Fig. 5.2). Sea T el centro de la Tierra y TQ la proyección de TO' sobre TO. Tendremos:

$$\overline{OQ} = a\rho + \Delta(a\rho) - a\rho = a\Delta\rho$$

y también

$$\overline{OQ} = h\cos v$$

de donde

$$\Delta\rho = \frac{h}{a}\cos v$$

Si sustituimos la tangente de $\Delta\phi'$ por el arco (v < 12', por lo que es una aproximación razonable), resulta:

$$a(\rho + \Delta\rho)\Delta\phi' = h\sin v$$

y despreciando términos de segundo orden:

$$a\rho\Delta\phi' = h\sin v$$

Si definimos la *altitud reducida* $H=h/a$, obtenemos las correcciones en coordenadas polares:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\rho &= H\cos v \\ \Delta\phi' &= \frac{H}{\rho}\operatorname{sen} v \end{aligned}\right\} \qquad (13.2)$$

En coordenadas cartesianas la corrección será:

$$\Delta x = h\cos\phi = aH\cos\phi$$
$$\Delta z = h\operatorname{sen}\phi = aH\operatorname{sen}\phi$$

y según (6.2) tendremos:

$$\left.\begin{aligned} x + \Delta x &= a(C(\phi) + H)\cos\phi \\ z + \Delta z &= a(S(\phi) + H)\operatorname{sen}\phi \end{aligned}\right\} \qquad (14.2)$$